Årg. 40:4 Dec. 1957

ELEMENTA

Tidskrift för matematik, fysik och kemi

FJÄRDE HÄFTET

Olof Hanner, Ytinnehåll i euklidisk geometri 229

G. Starck, Demonstration av jod- och brommolekylernas termiska dissociation 239

Søren Sikjær, Relativitetsteori. En elementær fremstilling for gymnasiet 243

Conrad Lönnqvist, Ellipsens och hyperbelns ekvationer 254

Notiser: W. Lindquist, Demonstration av tobaksrökens beståndsdelar; Bengt Liljeqvist, Cinemascopeprojektion; Karl Eriksson, Ett problem inom termokemi; Aarre Saarnio, Apparat för bestämmande av vätskors specifika vikt; N. Bertil Nilsson, Luftlinser, Tavellinjaler; Karl von Proschwitz, Några reflexioner kring ett studentproblem 256

Bokanmälningar: Stenmark, Matematikundervisningen i realskolan; Wallis/Roberts, Statistics: A New Approach; Snedecor, Statistical Methods; Thrall/Tornheim, Vector Spaces and Matrices; Crank, The Mathematics of Diffusion; Brand, Vector Analysis; Favard, Cours de géométrie différentielle locale; Livesley, An Introduction to Automatic Digital Computers; Montel, Leçons sur les récurrences et leurs applications; Temperley, Changes of State; Farley, Elements of Pulse Circuits; Rose, Elementary Theory of Angular Momentum; Grabbe, Automation in Business and Industry; Strålningskemi, Föredrag vid konferens; Timm, General Chemistry; Calvet/Prat, Microcalorimétrie; Appleton, Science and the Nation; Compton, Atomic Quest: A Personal Narrative; Bates, Space Research and Exploration; Clarke, The Making of a Moon; Birkenstock/Schulte, Die Elektronentheorie im Unterricht der Oberstufe; Kemistyrket—Framtidsyrket; Mathematical Tables Vol. 1; Storm, Plastisk bearbetning 263

Problemavdelning:

Matematiska problem (red. av S. Bågman) 280

Matematiska och fysikaliska uppg. i studentexamen nov. 1957 283

Realexamen h.t. 1957: Provräkningar 290

Praktisk realexamen h.t. 1957: Uppg. i fysik, Uppg. i kemi med laboratorieteknik, Uppg. i beskrivande maskin- och byggnadslära 292

Ett beriktigande och En rättelse 296

Författare i detta häfte (omslaget); Insänd litteratur (annonsbladet vid sid. 240).

Annonsörer: Almqvist & Wiksell; Rudolph Grave; Lindståhls Bokhandel; Norstedt & Söner; Svenska Bokförlaget.

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16IV STOCKHOLM

Att beakta Prenumerationsavgiften för år 1958, kr 15:—, inbetalas å postgiro 52755. Observera bilagda portofria inbetalningskort, som medföljer försändelser till privata abonnenter. Till bibliotek, skolor, institutioner m. fl. har fakturor utsänts 21.11. 1957.

Av stor betydelse är att prenumeration göres redan i december. Härigenom försäkrar sig abonnenten om att erhålla marshäftet — som utkommer redan i februari — vid första utsändningen omedelbart efter tryckningen. Den andra utsändningen sker först i mitten av mars. En tidig inbetalning underlättar också red:s expeditionsarbete, som under senare år — med den stigande upplagan — ökat avsevärt.

Studerande vid universitet och högskolor erhåller tidskriften vid direkt prenumeration hos red. till ett pris av kr. 12:50. Hänvisning göres vid inbetalningen till studentkatalog. Se bifogade inbetalningskort. Även de elever (ett hundratal) vid läroverken som under 1957 mottagit tidskriften som premium kan erhålla årg. 1958 till kr. 12:50.

Pärmar finns nu åter, avsedda för två årg. och i samma utförande som tidigare (grön klot), dock med den skillnaden att de ej är försedda med årgångs- och årtalstryck. Ett mindre antal med dylikt tryck (före 1956) finns dock, vilket bör beaktas vid rekvisition. Pärmarnas pris är kr. 3:— jämte 25 öre i porto.

Om särtryck och äldre årgångar se annonsbladet invid sid. 240.

Problemhäfte 1957 har utkommit. Det innehåller examensuppg. i real- och studentex. givna under 1957 samt uppgifter i fyllnadsprövningarna, såväl efter den äldre som den nya stadgan.

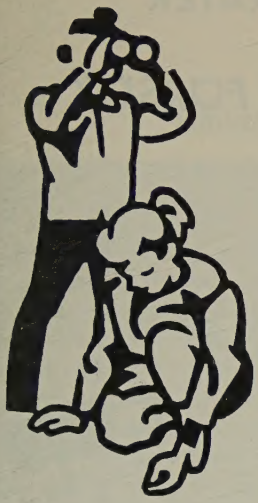
Problemhäfte 1956 föreligger i nytryck. Detta häfte innehåller utom examensuppg. för året Skolöverstyrelsens »Övningsuppgifter i matematik till studentexamen».

I dessa häften finns vad som hittills officiellt föreligger i fråga om de nya skrivningstyperna i matematik i studentex.: i 1956 års häfte de nämnda övningsuppgifterna och i häftet för 1957 skrivningarna i mars, aug. och nov.

Häftena kostar per styck kr. 2:20 jämte 15 öre i porto. De rekvireras genom inbetalning å postgiro 52755.

Författare i detta häfte: lektor B. Adell, Lund; civiling. E. Block, Lund; fil. lic. G. Blom, Malmö; laborator S. Comét, Stockholm; lektor B. Englund, Uppsala; fil. lic. F. Eriksson, Göteborg; civiling. K. Eriksson, Härnösand; lektor T. Forsner, Gävle; laborator O. Hanner, Stockholm; lektor F. Hedström, Stockholm; lektor T. Jönsson, Stockholm; laborator K. Lidén, Lund; lektor B. Liljeqvist, Stockholm; laborator J. O. Linde, Stockholm; fil. lic. W. Lindquist, Stockholm; lektor C. Lönnqvist, Södertälje; fil. mag. N. B. Nilsson, Stockholm; fil. kand. J. Peetre, Lund; lärov. adj. K. von Proschwitz, Stockholm; fil. lic. H. Riesel, Stockholm; lektor A. Saarnio, Forssa, Finland; rektor S. Sikjær, København; lektor G. Starck, Stockholm; docent S. Sunner, Lund; civiling. S. Wahlborn, Stockholm.

Bilagor: Lindståhls Bokhandel; Elementa inbetalningskort.



Ett nytt grepp på biologiundervisningen!

Anders Boierth

BIOLOGI

För realskolan klass 1^3-2^3, 1^4-3^4 och enhetsskolan klass 7-8.

Kursmomenten har anslutits till temat *växterna producerar — djuren konsumerar* och framhåller samspelet i naturen.

Det gängse inlärningsstoffet har sovrats och koncentrerats till ett jämförelsevis litet antal sidor, innehållande kursens stomme.

Boken medverkar till

att tiden till läxgenomgång och läxförhör kan minskas
att tiden till försök, iakttagelser och annan aktivitetsundervisning kan ökas.

Omdöme om boken:

"Här framlagda bok är sakligt korrekt, vettigt uppställd och skriven på ett språk, som är begripligt för 13-15-åringar."

Inb. 4: 95 *Torsten Wickbom i TfSL*

ALMQVIST & WIKSELL

Box 159 - Stockholm 1 - Postgiro 758

AWE

LEYBOLD-APPARATER

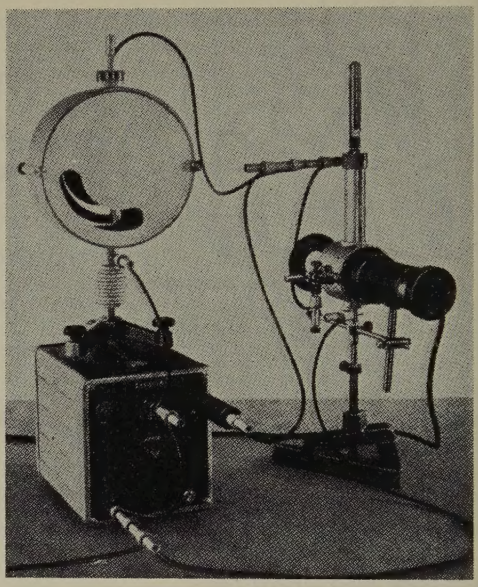
för

KÄRNFYSIKALISKA FÖRSÖK

Bilden visar:
Observation av α- och β-strålning med Geiger-Müller-rör och Wulf-elektroskop

—

För ytterligare informationer begär
SPECIALPROSPEKT
PH 34



Planera redan nu för

LEYBOLDS SOMMARKURSER I FYSIK 1958

Kontakta oss för närmare upplysningar

När det gäller fysikalisk apparatur

TAG KVALITET • TAG LEYBOLD

RUDOLPH GRAVE AB

SKOLAVDELNINGEN

Box 3082, Malmskillnadsg. 48 c, Stockholm 3, Tel. 23 37 80
Box 4158, St. Nygatan 27 b, Malmö 4, Tel. 381 25

Ytinnehåll i euklidisk geometri

Av laborator Olof Hanner, Stockholm

I den plana geometrin möter man två begrepp: längd av en sträcka och ytinnehåll (eller kortare yta) av ett område. För att mäta längden av en sträcka väljer man en sträcka, kallad enhetssträcka, och ger den längden 1. Varje annan sträcka får då ett bestämt mätetal som sin längd. Detta mätetal kan ungefär beskrivas som »antalet gånger enhetssträckan går upp i ifrågavarande sträcka». Om detta antal är ett helt tal, har vi här en sträng definition. I annat fall krävs en noggrannare precisering, som väsentligen innebär teorin för de allmänna bråken och för de irrationella talen. Vi vill här anse denna precisering klar och vänder oss nu till det andra begreppet, ytan av ett område. Vi vill visa att varje område begränsat av en polygon har en bestämd yta (så snart enhetssträckan är fixerad).

Låt oss börja med att studera vad problemet innebär. För varje sluten polygon P vill vi införa ett reellt tal $Y(P)$, en ytfunktion, som skall uppfylla följande villkor:

1) $Y(P) > 0$ för varje polygon P
2) $Y(P) = Y(P_1) + Y(P_2)$ om området innanför P delas i två områden vars randpolygoner är P_1 och P_2 (jfr fig. 1)
3) om P_1 och P_2 är kongruenta så är $Y(P_1) = Y(P_2)$
4) om P är en kvadrat med sidan 1 så är $Y(P) = 1$

Låt oss nu först antaga att vi på något sätt lyckats visa att varje polygonalt område har en yta, dvs. att vi för varje P har ett tal $Y(P)$ och att därvid villkoren 1)—4) är uppfyllda. Låt oss undersöka vad som följer härur. Historiskt sett intager vi då ungefär samma ståndpunkt som Euklides. Han införde visserligen inga mätetal för ytor (han saknade vår moderna irrationaltalsteori) men han jämförde ytor med varandra. Lägg exempelvis märke till att egenskapen 2) hos oss svarar mot Euklides axiom: Om man lägger lika stora till lika stora, så bliva de hela lika stora.

Vi vet enligt 4) att varje kvadrat med sidan 1 har ytan 1. Härav följer att en rektangel med sidor vars längder är de hela talen m och n har ytan mn, ty en sådan rektangel går att indela i mn stycken kvadrater, alla med ytan 1, och rektangelns yta erhålles genom upprepad användning av 2). För att sedan erhålla att ytan av en god-

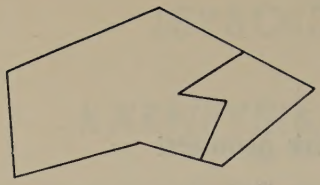


Fig. 1. Ett område begränsat av en polygon, uppdelat i två områden.

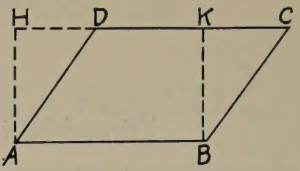


Fig. 2. En parallellogram och en rektangel med samma bas och höjd.

tycklig rektangel med sidornas längder a och b är ab, behöver man använda samma metod som vid införandet av längder av sträckor. Vi går inte här in på detaljerna.

Därnäst går vi till parallellogrammer. Ytan blir här basen gånger höjden. Detta inses genom det knep som framgår av fig. 2. Triangeln ADH är kongruent med triangeln BCK, och dessa trianglar har därför samma yta. Ytan av parallellogrammen $ABCD$, som är summan av ytorna för BCK och $ABKD$, är därför också summan av ytorna för ADH och $ABKD$ dvs. likamed den för $ABKH$, vilket är en rektangel med samma bas och höjd som parallellogrammen. (Om höjden från B inte träffar sträckan DC måste en liknande konstruktion göras flera gånger, se fig. 3.)

Därefter härleder vi att ytan av en triangel är hälften av produkten av basen och höjden (»basen gånger höjden genom 2»). Vi sammanfogar två kongruenta trianglar längs en sida som inte är den vi valt till bas (fig. 4). Vi får då en parallellogram med samma bas och höjd som trianglarna och med en yta dubbelt så stor som vardera triangeln. Härav erhålles trianglarnas yta.

Slutligen går vi till ett godtyckligt område begränsat av en polygon. Vi indelar området i trianglar (fig. 5). Ytan av området är sammanlagda ytan av trianglarna och var och en av trianglarnas ytor är basen gånger höjden genom 2.

Hittills har vi hela tiden stött oss på existensen av en yta $Y(P)$. Men det är denna existens vi i själva verket är ute efter. Vi har alls

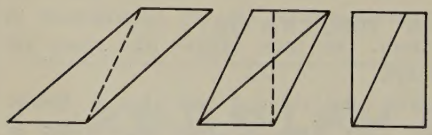


Fig. 3. En parallellogram överföres till en rektangel genom upprepad uppdelning och hopsättning.

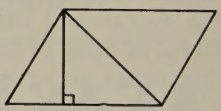


Fig. 4. Två kongruenta trianglar bildar en parallellogram med samma bas och höjd som trianglarna.

inte bevisat att en funktion $Y(P)$ existerar. Men vad har vi då vunnit med ovanstående överläggningar? Jo, entydigheten. Ty om vi hade två funktioner $Y_1(P)$ och $Y_2(P)$ båda definierade för alla polygonala områden och uppfyllande villkoren 1)—4), följer det av ovanstående bevisskiss att dessa funktioner måste vara lika för varje rektangel, för varje parallellogram, för varje triangel och slutligen för varje polygonalt område, dvs. vara en och samma funktion. Vi behöver därför endast ge *någon* definition av yta som satisfierar våra 4 villkor; det vi får blir då det enda möjliga ytbegreppet. Vi uppställer nu en sådan definition[1] och diskuterar mot slutet av artikeln några andra definitioner.

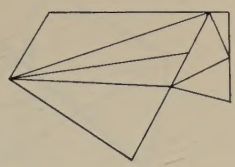


Fig. 5. Ett område indelat i trianglar.

Definition. Givet ett område begränsat av en polygon. Ytan $Y(P)$ av området definieras på följande sätt: Indela på något sätt området i trianglar. Om dessa är n stycken, kalla dem T_1, T_2, ..., T_n. Antag att i triangeln T_i en sida, kallad basen, har längden b_i och den mot denna stående höjden längden h_i. Då sättes

$$Y(P)=\tfrac{1}{2}(b_1h_1+b_2h_2+\ldots+b_nh_n).$$

För att denna definition skall ha en mening fordras att det däri beskrivna förfarandet skall ge ett entydigt resultat. Vi har ju dels möjligheten att välja triangelindelningen på olika sätt, dels möjligheten i varje triangel att välja en godtycklig sida som bas. Vi bevisa därför följande två satser:

Sats 1. Om i en triangel två sidor har längderna b_1 och b_2 och de mot dem stående höjderna längderna h_1 och h_2, så är $b_1h_1=b_2h_2$.

Sats 2. Om ett polygonalt område på två sätt indelas i trianglar blir summan av trianglarnas ytor (beräknade genom »basen gånger höjden genom två») densamma för båda indelningarna.

Genom dessa två satser (som vi strax skall bevisa) ser vi att ovanstående definition ger ett bestämt värde på ytan. Att vår definition satisfierar villkoren 1)—4) inses lätt genom verifikation. Så snart vi bevisat de båda satserna, har vi alltså nått vårt mål: att definiera en bestämd yta. I beviset för satserna får vi givetvis inte stöda oss på begreppet yta. Det är ju just existensen av detta begrepp som vi skall bevisa.

Bevis för sats 1. I triangeln ABC drages höjderna BB_1 och CC_1 (fig. 6). Då är triangeln ABB_1 likformig med triangeln ACC_1 (vink-

[1] Denna definition och satserna 1 och 2 är hämtade ur "Grundlagen der Geometrie" av D. Hilbert.

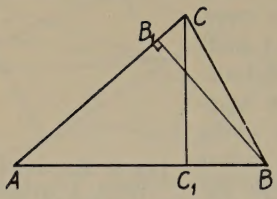


Fig. 6. Två höjder i en triangel.

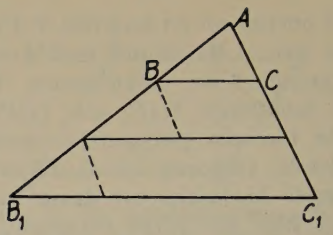


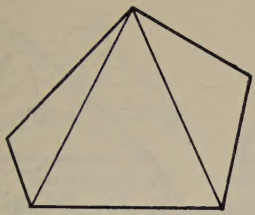
Fig. 7. BC är parallell med B_1C_1, $AB_1=3\,AB$. Konstruktionen enl. figuren visar att $AC_1=3\,AC$.

larna är lika), varav $AB:AC=BB_1:CC_1$ eller $AB\cdot CC_1=AC\cdot BB_1$, varmed satsen är bevisad.

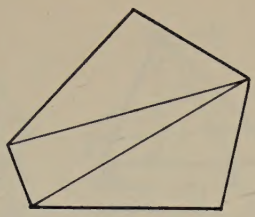
Vi ser således att för att bevisa denna sats krävs likformighetsläran. Denna bygger väsentligen på transversalsatsen: om två parallella linjer skär två vinkelben blir de avskurna sträckorna proportionella. Men denna sats är av samma slag som satsen om att varje sträcka har en längd. Observera exempelvis att om det ena vinkelbenet delas av de parallella linjerna i ett heltalsförhållande (eller rationellt förhållande) kan satsen bevisas med hjälp av kongruensläran (jfr fig. 7).

Bevis för sats 2. Vi inför nu med stöd av sats 1 följande uttryckssätt: för varje triangel kallar vi $\frac{1}{2}bh$ (= basen gånger höjden genom 2) för triangelns elementära yta. Det gäller att bevisa att för två olika indelningar av samma polygonala område i småtrianglar är summan av trianglarnas elementära ytor densamma.

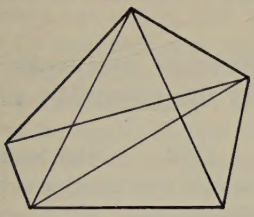
Vi börjar med att visa att det räcker att betrakta triangelformiga områden. En triangel har ju en bestämd elementär yta. Men den kan också betraktas som en polygon som begränsar ett område. Vi kan indela detta område i småtrianglar och bilda summan av dessas elementära ytor. Vi skall nu visa att, om vi vet att för varje indelning av en triangel denna summa alltid är likamed triangelns elementära yta, så kan vi därur bevisa sats 2. Antag nämligen att vi har två indelningar av ett område. Kalla indelningarna D_1 och D_2. Vi konstruerar en ny indelning D_3. De båda indelningarna D_1 och D_2 tillsammans (dvs. alla de sträckor som ingår som sidor i trianglarna i D_1 eller D_2, jfr fig. 8) uppdelar området i ett antal småområden. Varje sådant område som inte redan är en triangel indelar vi i trianglar. Alla trianglar som sålunda erhålles bildar en indelning D_3 (fig. 8). Denna har den egenskapen att varje triangel i någon av indelningarna D_1 och D_2 är sammansatt av vissa av trianglarna i D_3. Men om vi då vet att varje triangel i D_1 har en elementär yta som är likamed summan av de elementära ytorna för de motsvarande



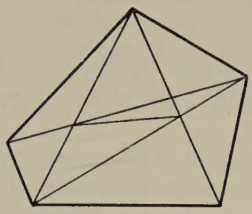
Indelningen D_1.



Indelningen D_2.



Indelningarna D_1 och D_2.



Indelningen D_3.

Fig. 8. Konstruktion av indelningen D_3, som är en finindelning av de båda givna indelningarna D_1 och D_2.

trianglarna i D_3, följer det genom summation att summan av de elementära ytorna för alla trianglarna i D_1 är densamma som för dem i D_3. På samma sätt inser vi att summan av de elementära ytorna för alla trianglar i D_2 är densamma som för dem i D_3. Men då är också summan av de elementära ytorna för alla trianglarna i indelningarna D_1 och D_2 lika sinsemellan, och sats 2 blir bevisad.

Vad vi alltså skall bevisa är att för varje indelning av en triangel är triangelns elementära yta likamed summan av deltrianglarnas elementära ytor. Vi går steg för steg i ett antal lemmor till allt mer komplicerade indelningar.

Lemma 1. Om ett hörn i en triangel sammanbindes med en punkt på motstående sida är triangelns elementära yta summan av de båda deltrianglarnas elementära ytor.

För beviset se fig. 9. Om längden av AD är b_1, längden av DB är b_2 och höjden i triangeln är h, så är hela triangelns elementära yta $\frac{1}{2}(b_1+b_2)h$ och de båda deltrianglarnas ytor $\frac{1}{2}b_1h$ resp. $\frac{1}{2}b_2h$.

Lemma 2. Om triangeln OAB delas så i deltrianglar att alla hörnen till dessa trianglar ligger på sträckorna OA och OB (fig. 10), så är OAB:s elementära yta likamed summan av deltrianglarnas elementära ytor.

Vi utför beviset genom induktion på antalet deltrianglar. Antag antalet deltrianglar är n och antag lemmat bevisat för n-1 deltrianglar. Eftersom inget hörn utom A och B ligger på sidan AB,

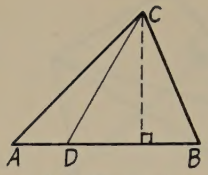


Fig. 9. En triangel delad i två trianglar, samtliga med samma höjd.

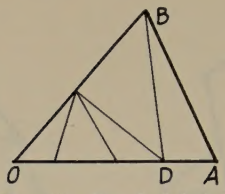


Fig. 10. En indelning av OAB sådan att alla hörnen ligger på OA och OB.

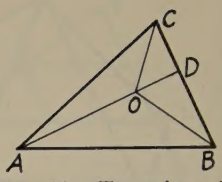


Fig. 11. En triangelindelning med ett hörn i det inre av triangeln.

måste denna sträcka vara sida i någon deltriangel, vars tredje hörn vi betecknar med D. D ligger på OA eller OB, exempelvis på OA. Då är

elem.ytan OAB = elem.ytan ODB + elem.ytan DAB (enligt lemma 1)
elem.ytan ODB = summan av elem.ytorna för alla deltrianglarna i ODB (enligt induktionsförutsättningen).

Alltså är

elem.ytan OAB = summan av elem.ytorna för alla deltrianglarna i OAB.

Då vårt lemma är riktigt för $n=1$ och $n=2$ är det bevisat för alla n genom induktion.

Lemma 3. Om O är en inre punkt i triangeln ABC, så är summan av de elementära ytorna för OAB, OBC och OCA likamed elementära ytan för ABC.

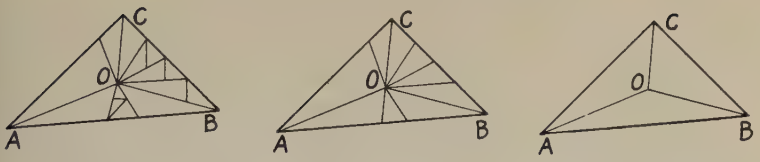
Med beteckningarna i fig. 11 får vi genom upprepad användning av lemma 1:

elem.ytan ABC =
elem.ytan ABD + elem.ytan ADC =
elem.ytan OAB + elem.ytan OBD + elem.ytan OCA + elem.ytan ODC =
elem.ytan OAB + elem.ytan OBC + elem.ytan OCA.

Detta bevisar lemma 3.

Låt D vara en indelning av en triangel ABC med följande egenskap: Från en punkt O i det inre av triangeln går ett antal sträckor till triangelns periferi. Dessa sträckor delar triangeln i ett antal områden. Varje triangel i indelningen D ligger nu i ett av dessa områden och har sina hörn på de båda sträckor från O som begränsar området. Detta kan också uttryckas så: på sträckorna från O ligger samtliga hörn i indelningen och ingen triangel i indelningen skärs av någon av dessa sträckor (fig. 12 a). Vi kallar D stjärnformig om den har denna egenskap.

Lemma 4. För varje stjärnformig indelning är summan av deltrianglarnas elementära ytor likamed triangelns elementära yta.



a. Indelningen D. b. Indelningen D_1. c. Indelningen i lemma 3.

Fig. 12. En stjärnformig indelning som successivt förenklas.

Hörnen i triangeln ABC måste vara hörn i indelningen D och alltså enligt förutsättningarna ligga på sträckor från punkten O. De områden i vilka alla sträckorna från O delar ABC blir därför alla triangulära. Kalla denna indelning i triangulära områden för D_1 (fig. 12 b).

Varje triangel i D_1 blir vid övergång till D delad i ett antal mindre trianglar. Detta sker precis så som lemma 2 anger; alla hörnen ligger på sidorna från O. Alltså är enligt lemma 2 elementära ytan av varje triangel i D_1 likamed summan av de elementära ytorna för alla trianglar i D som triangeln uppdelas i. Summeras detta över alla trianglarna i D_1, får vi att summan av de elementära ytorna för D_1 är likamed summan av de elementära ytorna för D. För att visa att summan för D är likamed triangeln ABC:s elementära yta behöver vi därför endast visa att detta är fallet med summan för D_1, dvs. vi behöver blott betrakta indelningen D_1.

I D_1 är triangeln OAB indelad i mindre trianglar genom att punkten O är förbunden med ett antal punkter på sidan AB. Vi kan därför ånyo använda lemma 2, denna gång på OAB (hörnen ligger på AB och AO) och utan att ändra summan av deltrianglarnas elementära ytor ersätta indelningen av OAB med den oindelade triangeln OAB. På motsvarande sätt förfar vi med OBC och OCA. Utan att summan av de elementära ytorna förändrats har vi därigenom kommit över till den indelning i tre trianglar (fig. 12 c) som beskrives i lemma 3. Men för denna indelningen vet vi att summan av deltrianglarnas elementära ytor är likamed elementära ytan för triangeln ABC. Detta bevisar lemma 4.

Vi vill nu slutligen angripa det allmänna fallet, då vi har en godtycklig indelning. Metoden blir den att vi genom att införa nya sträckor och göra indelningen finare kommer över till en stjärnformig indelning, på vilken vi använder lemma 4. Vi behöver emellertid först undersöka vad som händer då en linje skär en triangel.

Lemma 5. Om en triangel skärs av en rät linje kan triangeln uppdelas i deltrianglar så, att deltrianglarnas hörn ligger på linjen eller är hörn i den ursprungliga triangeln och så att summan av deltrianglarnas elementära ytor är hela triangelns elementära yta.

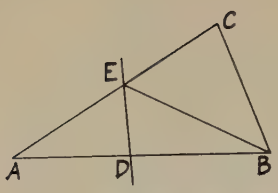


Fig. 13. En rät linje skär en triangel.

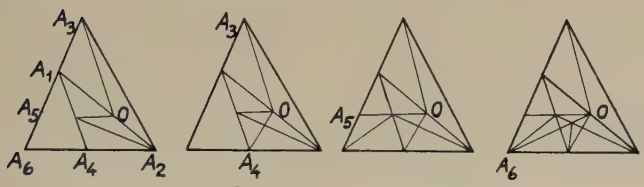
Vi har två fall att undersöka, båda enkla. I första fallet går linjen genom ett hörn och skär motstående sida. Lemmat följer då ur lemma 1. I det andra fallet skär linjen triangeln ABC i två sidor, exempelvis AB och AC i D resp. E (fig. 13). I detta fall drar vi BE. De tre trianglarna ADE, DBE och BCE ligger då som vårt lemma fordrar. Vad slutligen gäller de elementära ytorna följer beviset ur lemma 2 (hörnen ligger på AB och AC).

Vi är nu klara för det sista lemmat.

Lemma 6. Varje indelning av en triangel ABC i deltrianglar kan genom ytterligare indelning överföras i en stjärnformig indelning. Detta går att göra så att summan av deltrianglarnas elementära ytor blir oförändrad.

Det är omedelbart klart att sats 2 följer ur lemma 6 tillsammans med lemma 4, ty en godtycklig indelning kan på grund av lemma 6 överföras i en stjärnformig indelning. Summan av de elementära ytorna för den ursprungliga indelningen är därvid densamma som för den stjärnformiga. Men enligt lemma 4 är ju denna sista summa just triangelns elementära yta varmed sats 2 blir bevisad.

För att bevisa lemma 6 väljer vi en punkt O i det inre av triangeln ABC. O skall antingen vara ett hörn i någon deltriangel eller ligga på en sida i någon deltriangel. En sådan punkt finns alltid (om inte indelningen av ABC består av den enda triangeln ABC, i vilket fall ingenting finns att bevisa). Därefter betraktar vi alla sådana sträckor från O till periferin av ABC som går genom något hörn (skilt från O) i någon deltriangel i D. Kalla sträckorna i någon ordning OA_1, OA_2, ..., OA_n, där A_1, A_2, ..., A_n således är punkter på triangeln ABC:s periferi. Indelningen D modifieras nu genom att dessa sträckor successivt tillfogas indelningen. Låt oss närmare studera införandet av den första, OA_1. Sträckan OA_1 skär ett antal deltrianglar (varken O eller A_1 kan ligga i det inre av någon deltriangel). På var och en av de skurna trianglarna tillämpa vi lemma 5. Utan att summan av de elementära ytorna ändras blir de skurna trianglarna därigenom uppdelade i mindre trianglar och, vilket är väsentligt för bevisgången, de enda nya hörn som införes ligger på sträckan OA_1. Då sålunda OA_1 är införd, införes OA_2, därefter OA_3 osv. tills alla sträckorna är införda (fig. 14). Under hela proceduren blir summan av de elementära ytorna oförändrad; indelningarna sker ju genom upprepad användning av lemma 5. Den slutligen erhållna indelningen är emellertid stjärnformig. Ty dels ligger ju alla hörnen i den ursprungliga



a. *b.* *c.* *d.*

Fig. 14. En indelning överföres genom ytterligare indelning i en stjärnformig indelning.

a. Ursprungliga indelningen; OA_1, OA_2 och OA_3 är redan dragna.
b. Sträckan OA_4 drages.
c. Sträckan OA_5 drages. Därvid uppstår en fyrhörning som delas i två trianglar.
d. Sträckan OA_6 drages. En fyrhörning uppstår som delas i två trianglar.

indelningen på sträckorna $OA_1, \ldots, OA_n$ liksom ock alla nya hörn (som just påpekats), dels skärs ingen triangel i den slutliga indelningen av någon av sträckorna; varje gång en triangel blir skuren av en av sträckorna uppdelas den ju i mindre trianglar som inte skärs av ifrågavarande sträcka. Detta bevisar lemma 6 och därmed sats 2. Vi har således bevisat att vår definition av yta ger ett entydigt resultat.

Härifrån kan vi gå över till att betrakta områden begränsade av kurvor. Detta sker genom in- och omskrivning av polygoner jämte limesövergång. Vi vill inte närmare gå in härpå. Emellertid kan vi i detta sammanhang framhålla att om man utnyttjar en limesprocedur kan ovanstående metod för definition av yta betydligt förenklas. I stället för att betrakta godtyckliga polygonala områden begär vi då endast först att ytan skall vara definierad för varje område begränsat av en polygon vars samtliga sidor är alternerande parallella med en av två vinkelräta linjer (som vi kan tänka oss som koordinataxlar, jfr fig. 15). Ytfunktionen skall härvid uppfylla

1a) $Y(P) > 0$ för varje P

2a) $Y(P) = Y(P_1) + Y(P_2)$, om området innanför P delas i två områden vars randpolygoner är P_1 och P_2

3a) om P_1 är en parallellförskjutning av P_2 så är $Y(P_1) = Y(P_2)$

4a) om P är en kvadrat med sidorna parallella med axlarna och med sidolängden 1 så är $Y(P) = 1$.

Skillnaden mellan denna situation och vår föregående är den att vi nu avstår från att göra ytan vridningsinvariant redan vid definitionen.

Hela ovanstående resonemang kan nu upprepas men blir betydligt enklare. I stället för trianglar som grundelement inför vi axelparallella rektanglar, och den elementära ytan av en sådan är produkten av sidornas längder. Någon motsvarighet till sats 1 behövs inte nu, efter-

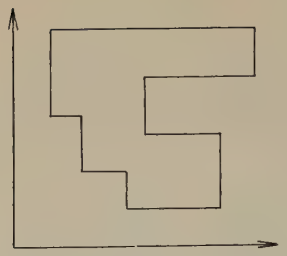


Fig. 15. En polygon med sidor parallella med axlarna.

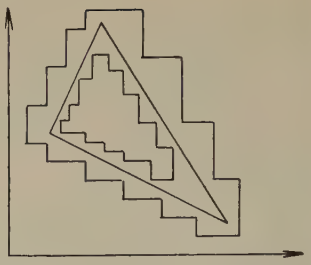


Fig. 16. En triangel med in- och omskrivna axelparallella polygoner.

som den elementära ytan för en rektangel icke innebär något val av bas såsom för en triangel. För att bevisa motsvarigheten till sats 2 behöver vi endast först bevisa att om en rektangel delas av en linje parallell med en av axlarna så blir summan av delrektanglarnas elementära ytor likamed hela rektangelns elementära yta. I stället för sträckor från en punkt O genom indelningens alla hörn drar vi nu de axelparallella linjerna genom hörnen.

Enligt denna metod får man alltså ytan först definierad för axelparallella polygoner. Men genom att in- och omskriva sådana polygoner (fig. 16) och göra en limesövergång kan man lätt definiera ytan av ett godtyckligt polygonalt område.

Denna metod är den som används inom integralkalkylen. Att ytan av ett område blir invariant då området vrides följer inte omedelbart enligt denna metod utan måste särskilt visas; detta kan exempelvis ske genom att man visar att en i förhållande till axlarna snett belägen kvadrat med sidolängden 1 har ytan 1.

Denna metod kan med fördel användas när det gäller volymer i det tredimensionella rummet (eller i rum av högre dimensioner). Man bygger då upp volymen med hjälp av axelparallella parallellepipeder och visar vridningsinvariansen efteråt.

Slutligen kan här omnämnas ytterligare en metod för definition av yta, en rent analytisk metod. Enligt denna inför man koordinaterna (x_i, y_i) $i=1, 2, \ldots, n$ för polygonens hörn räknade successivt i någon omloppsriktning och definierar ytan som summan av uttrycken $\frac{1}{2}(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})$ (varvid (x_{n+1}, y_{n+1}) skall uppfattas som (x_1, y_1)). Därefter bevisar man att ytan så definierad uppfyller villkoren 1)—4). Vid denna metod blir ytan försedd med ett tecken; detta tecken sammanhänger med den omloppsriktning i vilken polygonen genomlöpes. Metoden kan inte med fördel utnyttjas vid definition av volym, då den i tre dimensioner leder till långa räkningar.

Demonstration av jod- och brommolekylernas termiska dissociation.

Av lektor G. Starck, Stockholm

Jodmolekylernas sönderfall vid höga temperaturer enligt formeln $J_2 \rightleftarrows 2J$ undersöktes första gången noggrant av G. Starck och Max Bodenstein (ZElch *16*, 921; 1910). Dissociationen bestämdes genom mätning av jodångans gastäthet vid temperaturer mellan 1073° K och 1473° K och av gastäthetens avvikelse från den för odissocierad jodgas beräknade. Resultaten kunde återges av ekvationen

$$\log p_J^2/p_{J_2} = \log K_p = -7550/T + 1{,}75 \log T - 4{,}09 \cdot 10^{-4} T + 4{,}726 \cdot 10^{-8} T^2 + 0{,}162$$

som framgår av tabell 1.

Tabell 1

T	$\log K_p$ obs	$\log K_p$ ber (1)	$\log K_p$ ber (2)	$\log K_p$ ber (3)
1073	−1,943	−1,957	−1,869	−1,928
1173	−1,324	−1,317	−1,276	−1,320
1273	−0,782	−0,776	−0,777	−0,782
1373	−0,308	−0,316	−0,346	−0,306
1473	+0,091	+0,090	+0,024	+0,086

Under $\log K_p$ ber (1) återges de enligt formeln härovan beräknade värdena. Senare har H. Bramme och H. Ramstetter (ZphCh *102*, 500; 1922) bestämt jodens dissociation mellan $T = 915°$ och $T = 1384°$ på i princip samma sätt och givit en väsentligt förenklad formel. T. de Vries och W. H. Rodebusch (JACS *49*, 662; 1927) har utvidgat temperaturområdet nedåt ända till $T = 732°$ ($t = 459°$ C) och likaledes givit en egen empirisk formel. Flera forskare har behandlat problemet teoretiskt, framför allt G. N. Lewis och M. Randall (Thermodynamics 1923), som härleder formeln

$$\Delta F° = 31700 - 2{,}6\, T \cdot \ln T + 0{,}0005\, T^2 - 3{,}4\, T$$

där $\Delta F°$ är ändringen i fri energi. Formeln kan transformeras till

$$\ln K_p = -31700/RT + 2{,}6 \ln T/R - 0{,}0005\, T/R + 3{,}4/R \quad \text{eller}$$

$$\log K_p = -31700/4{,}571\, T + 2{,}6 \log T/1{,}98 - 0{,}0005\, T/4{,}571 + 3{,}4/4{,}571,$$

och

$$\log K_p = -6937/T + 1{,}31 \log T - 0{,}000109\, T + 0{,}744.$$

De enligt denna formel beräknade värdena på $\log K_p$ för temperaturerna i tabell 1 är införda under $\log K_p$ber(2). Överensstämmelsen med de av S. och B. funna värdena är inte särdeles god. Av stort intresse är att jodmolekylens dissociation senare har kunnat bestämmas genom analys av jodångans bandspektrum. G. E. Gibson och W. Heitler (Z. für Physik *49*, 465; 1928) och W. G. Brown (Phys. Rev. (2) *38*, 1187; 1931) har på denna väg erhållit värden som bekräftar Starcks och Bodensteins resultat. I tabell 1 är under $\log K_p$ber(3) införda de av Gibson och Heitler för tabellens temperaturvärden beräknade värdena på $\log K_p$, erhållna genom en undersökning av jodgasens bandspektrum. Överensstämmelsen med de på termisk väg erhållna värdena är mycket god.

Med användning av Starcks och Bodensteins formel kan man under förutsättning av dess giltighet beräkna förhållandena vid ännu högre temperaturer, alltså jämviktskonstantens värden, jodmolekylens dissociationsgrad α vid ett totaltryck av 1 atm och jodatomernas partialtryck vid samma totala tryck. Resultatet redovisas i tabell 2.

Tabell 2

T	$\log K_p$ber	100α	p (atm)
1073	−1,957	5,2	0,099
1173	−1,317	10,9	0,197
1273	−0,776	20,1	0,335
1373	−0,316	33,6	0,496
1473	+0,090	48,2	0,650
1673	+0,718	56,0	0,718
1873	+1,225	89,7	0,946
2073	+1,623	96,1	0,980
2273	+1,934	98,0	0,99

Vid 1800—1900° C är således jodmolekylen nästan fullständigt spjälkad i atomer, bättre uttryckt, jodmolekylen är vid denna temperatur enatomig. Något genomskinligt kärl vari jodgasen utifrån kan upphettas till dessa temperaturer och där dess färg skulle kunna iakttas, finns ej. Om man således vill se hur enatomig jodgas ser ut, återstår endast att anbringa värmekällan inuti ett glas- eller kvartskärl, m. a. o. att låta en ljusbåge brinna inuti gasen. I ljusbågens närmaste omgivning bör man kunna räkna med en temperatur, som säkert uppnår eller överskrider den behövliga. Kärlet måste vara ganska litet, då man kan räkna med en kraftig temperaturgradient, dvs. ljusbågens verkan kommer inte att sträcka sig långt och den bör nå fram till kärlväggarna för att inte tvåatomiga molekyler skall skymma resultatet.

ELEMENTA

Årligen fyra häften (mars, juni, sept., dec.). Prenumeration sker genom inbetalning å postgiro 527 55; pr år kr. 15:—, pr häfte kr. 4:25. Tidskriften sändes som utgivarkorsband.

Red. och utgivare: fil. dr C. E. Blom. Karlbergsv. 16, Stockholm.

Tidigare årg. Förfråga Eder direkt hos red. Av årg. 1—13 är flera ofullständiga. Priset pr årg. (i häften) är för årg. 14 (1931) t.o.m. 34 (1951) kr. 10:—, för årg. 35—38 kr. 12:50, för årg. 39 och 40 kr. 15:—.

Pärmar av grön klot à 3:—+25 öre i porto; varje pärm avsedd för två årg.

Problemhäften för åren 1943—52 à kr. 1:20, för 1953—1955 à kr. 1:40, för 1956 och 1957 à 2:20. Innehåll: Student- o. realex.-uppg. i matem. o. fysik med svar och anvisningar.

Särtryck ur ELEMENTA:

2. M. Sjöström, Vätskors och gasers strömning, kr. 2:—.
3. M. Sundqvist, Teorien för de moderna glasögonen, kr. 2:—.
6. S. Comét, Matrisräkning. Slut.
7. H. Henrikson, Om segelflygning och dess energikällor i atmosfären, kr. 2:40.
8. K.-B. Augustinsson, Vitaminernas kemi, kr. 2:—.
9. L. G. Sillén, Kemiska reaktionsformler, kr. 2:60.
10. L. G. Sillén, Kemistens hjärna - ett utrymmesproblem, kr. 2:—.
11. C.-E. Fröberg—G. Kjellberg—O. Boivie, Siffermaskiner och hålkortsmaskiner, kr. 3:—.
12. Karin Aurivillius, Analysvågen, kr. 2:40.
13. Uno Trägårdh, Primär- och sekundärelement, kr. 2:40.
14. K.-B. Augustinsson, Enzymkemi, kr. 2:60.

Problemhäften och övriga särtryck sändes pr korsband (porto 15 öre) om inbetalning sker till postgiro 527 55, Elementa, Karlbergsvägen 16, Stockholm.

Allmänt omvittnat är att en avsevärd del av innehållet i Elementa — icke minst i äldre årg. — är av bestående värde. En Elementaserie är därför en beaktansvärd tillgång. En komplett dylik är svår att uppbringa, men ännu finnas alla årg. fr. o. m. årg. 14. Lagret tunnas emellertid ut med varje år som går. Försumma därför ej att nu skaffa Er en så fullständig samling som möjligt. Priser se ovan.

Insänd litteratur

John Wiley & Sons, Inc., New York/Chapman & Hall Ltd., London, 1957:

R. D. Luce/H. Raiffa, *Games and Decisions.* Pp. 509, $ 8.75.

W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* Pp. 461, $ 10.75.

Ch. Walling, *Free Radicals in Solution.* Pp. 631, $ 14.50.

M. Jakob/G. Hawkins, *Elements of Heat Transfer.* 3rd Ed. Pp. 317, $ 6.75.

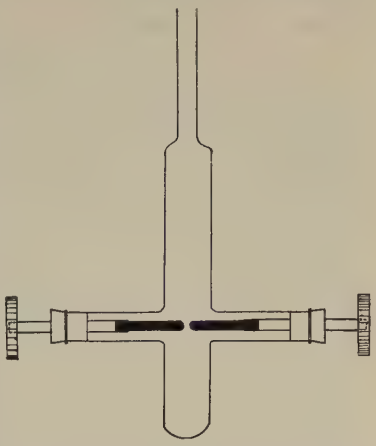
A. J. Stepanoff, *Centrifugal and Axial Flow Pumps.* 2nd Ed., Pp. 462, $ 12.00.

R. A. Buckles, *Ideas, Inventions, and Patents.* How to Develop and Protect Them. Pp. 270, $ 5.95.

L. F. Hatch, *Higher Oxo Alcohols.* Pp. 120, $ 4.50.
E. F. Beach, *Economic Models.* Pp. 227, $ 7.50.
R. G. Canning, *Installing Electronic Data Processing Systems.* Pp. 193, $ 6.00.
G. E. Hutchinson, *A Treatise on Limnology.* Pp. 1015, $ 19.50.

H. C. Muldoon/M. I. Blake, *Systematic Organic Chemistry.* McGraw-Hill Book Co., New York/Toronto/London, 1957, Pp. 828, 58 s. net.
M. Benedict/Th. Pigford, *Nuclear Chemical Engineering.* McGraw-Hill Book Co., New York/Toronto/London, 1957, Pp. 594, 71 s. 6 d.
F. A. Jenkins/H. E. White, *Fundamentals of Optics.* 3rd Ed. McGraw-Hill Book Co., New York/Toronto/London, 1957, Pp. 637, $ 8.50.
Lancelot Hogben, *Statistical Theory.* Allen & Unwin, London, 1957, Pp. 510, 45 s. net.
E. A. Maxwell, *An Analytical Calculus.* Vol. IV. Cambridge Univ. Press, 1957, Pp. 288, 22 s. 6 d. net.
Some Methods of Measuring Temperature. Technical Monographs No. 1. Cambridge Instrument Co., London 1957, Pp. 15.
F. Pollaszek, *Problèmes stochastiques.* Gauthier-Villars, Paris, 1957, 122 p., 2500 fr.
D. Dugué, *Arithmétique des lois de probabilités.* Gauthier-Villars, Paris, 1957, 50 p., 1000 fr.
A. Tresse, *Théorie élémentaire des géometries non euclidienne.* Gauthier-Villars, Paris, 1957, 150 p. 2500 fr.
H. Arzeliés, *La dynamique relativiste.* Gauthier-Villars, Paris, 1957, 304 p., 400 fr.
G. Charlot, *L'analyse qualitative et les réactions en solution.* Masson & Cie, Paris, 1957, 368 p., 3600 fr.
H. Graewe, *Atomphysik.* Dümmlers Verlag, Bonn, 1954, 340 S., DM 19.80.
Fr. A. Willers, *Methoden der praktischen Analysis.* W. de Gruyter & Co., Berlin, 1957, 429 S., DM 28.00.
K. Cruse/R. Huber, *Hochfrequenztitration.* Verlag Chemie, Weinheim, 1957, 198 S., DM 22.00.
Niels Bohr, *Atomfysik og menneskelig erkendelse.* Schultz forlag, København, 1957, 124 s., dkr. 9.50.
Knut Parck, *Imitation av lyxvaror.* Kemisk teknik i Egypten under antiken. Lindstedts Univ. Bokh., Lund, 1957, 60 s., kr. 3: 75.
H. von Ubisch, *Atomenergi och kärnfysik.* Folkuniversitetets förlag, Stockholm, 1957, 111 s., kr. 11: —.
G. Bonnier/O. Tedin, *Biologisk variationsanalys.* 2:dra uppl. Svenska Bokförlaget/Bonniers, Stockholm, 1957, 186 s. jämte tabellbilaga, kr. 29: 50.
C.-O. Sandström/L. Ullemar, *Geometri I.* För realskolan och enhetsskolan. Alternativkurs 2. Sv. Bokförl./Bonniers, Stockholm, 1957, 90 s., kr. 3: 75.
Beckman/Wetterblad/Lindahl, *Fysik för enhetsskolan II.* Kursen för kl. 8: Alternativkurs 1, 119 s., kr. 4: 35, Alternativkurs 2, 184 s., kr. 6: 30. Sv. Bokförlaget/Bonniers, Stockholm, 1957.
W. Ekman/C.-O. Sandström, *Kemi för enhetsskolan,* kl. 9. Alternativkurs 1, 53 s., kr. 3: —. Alternativkurs 2, 72 s., kr. 3: 35. Sv. Bokförlaget/Bonniers, Stockholm, 1957.
U. Sellergren/I. Brodén, *Enhetsskolans kemi.* Alternativkus 1 och 2. AVCarlsons förlag, Stockholm, 1957, 208 s., kr. 5: 50.
Fakta, Koncentrerad kunskapsbok i sju band. Band 3: Länder och Folk. Bokförlaget Fakta, Stockholm 1957, 280 s., inb. kr. 28: —.

Den lilla elektriska ugn, som jag tidigare har använt för några försök och som beskrivits i Elementa, *34*, 157; 1951, passar utmärkt, men jag har funnit det lämpligt att modifiera den något. Den nya apparaten är som vanligt gjord av pyrexglas och utseendet framgår av figuren.



Apparaten beskickas i sin nedersta del med litet jod, högst 0,5 g, och fastsättes i lodrät ställning, så att hela det centrala röret blir synligt för åskådarna. Då ljusbågen har brunnit några minuter, har joden förgasats och ett stationärt tillstånd har utbildats. Här bör det påpekas att stora jodmängder verkar fördröjande, joden kommer då i våldsam kokning, och jodgasen hinner inte uppvärmas av ljusbågen. För att iaktta gasen utan att bländas av bågljuset måste man skärma för den med en metallbit av en ettörings storlek, lämpligen skaftad.

Nu ser rörets innehåll ut på följande sätt (ungefärliga mått). På ömse sidor om ljusbågen, 3 cm uppåt och 2 cm nedåt, är gasen färglös. Ovanför den färglösa zonen synes på rörets vägg ett 3 cm brett tunt beslag eller sublimat, och ett liknande 1 cm brett sublimat har bildats nedanför det färglösa området. Det är möjligt att det utgöres av förgasad och kondenserad aska från kolet. För övrigt är apparaten fylld av violett jodånga, ehuru färgen givetvis är ganska svag. Den övre delens väggar är också delvis täckta av flytande jod.

Man vågar väl antaga, att temperaturen i ljusbågens närmaste omgivning är så hög, att jodmolekylerna är fullständigt spjälkade i atomer. Därav skulle således följa att enatomig jodgas är färglös. Men även om det är mer än sannolikt att jodmolekylerna är enatomiga vid hög temperatur, så kan det ju också tänkas att gasen vid 1 atmosfärs tryck och mycket hög temperatur är så förtunnad, att man redan av det skälet inte kan se dess färg. Jag har därför beräknat tätheten av odissocierad jodånga vid 2000° C och 1 atm och sedan genom förgasning av en beräknad mängd jod i ett slutet kärl av känd volym vid cirka 200° C framställt jodånga av den för 2000° C beräknade tätheten men säkert tvåatomig. Det visade sig att denna jodånga var tydligt om också inte kraftigt violett.

Brommolekylens dissociation har bestämts genom en undersökning av Bodenstein och Cramer (ZElch 22, 337; 1916) mellan 1075,1° K och

1557,8° K. Liksom i fråga om jod bestämdes gastätheten, och dissociationen beräknades på grund av avvikelsen från det för odissocierade molekyler beräknade värdet. Bodensteins och Cramers värden återges av ekvationen

$$\log p^2_{Br}/p_{Br_2} = \log K_p =$$
$$= -10100/T + 1{,}75 \log T - 4{,}09 \cdot 10^{-4} T + 4{,}726 \cdot 10^{-8} T^2 + 0{,}548$$

Även dessa mätningar har bekräftats genom rent optiska undersökningar av bromgasens absorptionsspektrum, utförda bl. a. av E. J. Evans (Astrophys. J. *32*, 294; 1916).

I nedanstående tabell 3 ingår endast det högsta av Bodensteins och Cramers 35 värden och dessutom några för höga temperaturer beräknade värden.

Tabell 3

T	$\log K_p$obs	$\log K_p$ber	$100\,\alpha$ ber	P_{Br}ber (atm)
1557,8	−0,876	−0,870	18,1	0,307
1673		−0,368	31,2	0,475
1873		+0,282	56,7	0,724
2073		+0,834	62,3	0,768
2273		+1,292	90,5	0,950
2573		+1,852	98,0	0,99
3073		+2,553	100	1,0

Det krävs sålunda mycket högre temperatur för att brom skall bli enatomig än för att jod skall bli det. Det visar sig också, om man upphettar brom i den elektriska ugnen, att det färglösa området har krympt ihop till sammanlagt endast 2—3 cm. Här uppträder också ett fenomen som inte kunde iakttas vid försöken med jod. De oroliga förhållandena i ugnen, den turbulens och de virvelströmmar, som utan tvivel förekommer där, ger upphov till att det bildas och lika hastigt försvinner bruna tungor av bromgas, som ger intryck av lågor, som flammar upp och slocknar.

Om man skärmar för själva ljusbågen mot åskådarsidan, så syns glasrörets innehåll och skillnaden mellan dess skikt tydligt även på rätt stort avstånd.

Till sist bör det framhållas, att det utgår en elektronström från det negativa kolet och att som följd därav en del av jodatomerna förekommer som positiva atomjoner — hur stor del är utan närmare undersökning ovisst.

Relativitetsteori

En elementær fremstilling for gymnasiet

Af rektor Søren Sikjær, København

Gymnasiets fysikundervisning har selvfølgelig som en hovedopgave at give sine elever de solide kundskaber i elementær fysik og den færdighed i at anvende dem på konkrete problemer, som er en nødvendig forudsætning for et videregående studium ved et universitet eller en højere læreanstalt. Men desuden bør gymnasiets fysikundervisning bibringe sine disciple, hvad jeg ville kalde en faglig dannelse omfattende både en nogenlunde alsidig viden med helst noget kendskab til de vigtigste træk i fysikkens lærebygning og en forståelse af fagets idé og metode herunder en vis orientering i fysikkens historie.

Den naturvidenskabelige arbejdsmetode bør ikke alene være indøvet gennem en kombination af eksperiment og ræsonnement, men må også være eksplicit meddelt, ligesom eleverne skal have en klar forståelse af fysikkens målsætning, som den er formuleret af Mach: »Nicht die Erklärung sondern die Beschreibung ist die Aufgabe der physikalischen Theorien», og være bekendt med den udvikling, der blev gennemløbet, før man nåede frem til denne afklarede programudtalelse. Eleverne skal være sig fagets filosofi bevidst, f. eks. Keplers krav om »vera causa». De skal vide, at fysikken er et udoktrinært skema til indordning af erfaringsmaterialet, og at begreberne ikke eksisterer, før de er definerede. De skal vide, at selv metoderne kan gøres til genstand for kritik, og at endog begrebet forklaring i fysikken er tidsbestemt og i dag et andet end dengang, det mekaniske verdensbillede var i højsædet. Hensigten er at lære eleverne at tænke fysisk i moderne forstand og at gøre det bevidst.

I praksis har der i de danske skoler været en tendens til at trænge det almendannende tilbage til fordel for en teknisk dygtiggørelse i snævrere forstand med stærk vægt på den eksperimentelle undervisning og en udpræget koncentration om den klassiske fysik. En mindre stedmoderlig behandling af det almendannende ville sikkert være af stor betydning for vore elever, både for dem, der fortsætter med fysikken og — måske endda navnlig — for dem, der går ud i det praktiske liv eller vælger et humanistisk studium. Ikke mindst forekommer det mig beklageligt, at det egentlig nye i fysikkens udvikling efter århundredskiftet ofte lades ude af betragtning. Det ville efter min mening være ligefrem betænkeligt, om den dannede almenhed

Ur ett föredrag vid Föreningens för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Stockholm årsmöte i jan. 1957.

ikke fik en tilfredsstillende forståelse af opdagelser med så vide perspektiver og så stor almen interesse som Einsteins opdagelse af samtidighedens relativitet og kvantemekanikkens påvisning af, at forudsætningen for anvendelsen af årsagssætningen mangler ved visse atomare processer.

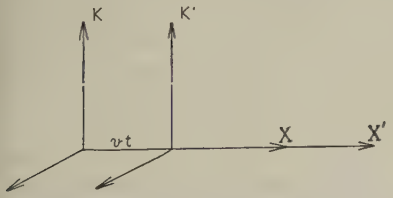
Man har betvivlet forsvarligheden og muligheden af at undervise i så vanskelige emner for gymnasiet som relativitetsteori og kvantemekanik. Det skal indrømmes, at ikke alt i den moderne fysik lader sig fremstille elementært. F. eks. kan den almindelige relativitetsteori næppe adskilles fra sit matematiske apparat, hvis fremstillingen skal være blot en smule dokumentarisk, og Riemannsk geometri og tensorregning ligger naturligvis langt udover, hvad man kan byde gymnasieelever. Men der findes jo også indenfor den klassiske fysik særdeles vigtige afsnit, f. eks. termodynamikken og den statistiske mekanik, som ikke eller i hvert fald kun i ringe grad gøres til genstand for undervisningen i gymnasiet. Der er både i den moderne og i den klassiske fysik ting, som man må lade ligge i gymnasiet. Men også for den del af fysikken, som er kommet til efter århundredskiftet, gælder, at vigtige og karakteristiske afsnit kan fremstilles i en for gymnasieelever forståelig form på en saglig forsvarlig måde og med en tilfredsstillende dokumentation, så eleverne føres frem til en lige så fuldstændig forståelse som f. eks. den, de har af den newtonske mekanik. Jeg har erfaring for, at dette kan gøres med det stof, som findes i første del af Einsteins afhandling fra 1905 »Zur Elektrodynamik bewegter Körper», og uden at der på nogen måde er et misforhold mellem elevernes arbejdsindsats og deres udbytte. Også andre karakteristiske sider af den moderne fysik kan gøres til genstand for en elementær undervisning, og det er vigtigt, at det sker. Fremstillingen skal ikke være populær, men elementær. Hermed mener jeg en dokumentarisk og faglig forsvarlig omend noget simplificeret form, hvor man selvfølgelig udnytter den matematiske teknik, som eleverne er fortrolig med.

En undervisning i moderne fysik giver ikke alene eleverne konkret viden; men er i særlig grad velegnet til at give dem en naturvidenskabelig almendannelse. Man må dog naturligvis passe på, at undervisningen ikke forvilder sig ud i filosofiske almenheder. Den rige arbejdsmark, man finder i den moderne fysik, har gymnasielærerne, i hvert fald i Danmark, i alt for høj en grad ladet ligge, formodentlig navnlig på grund af tidsnød. Jeg vil dog mene, at den tilstrækkelige tid kan vindes ved en omgruppering og koncentration af det elementære stof om de grundlæggende love og begreber. Iøvrigt bør tidssvarende tanker virke ind på fremstillingen af det klassiske stof. F. eks. burde det ikke kunne ske, at Newtons bevægelseslove behand-

les, uden det gøres klart for eleverne, at de forudsætter en tidsmåler og et koordinatsystem. De erkendelsesteoretiske brist i Newtons mekanik må også træde frem. I det hele taget opfordrer den moderne fysik til en sanering og præcisering af den klassiske fysiks begreber.

Min gennemgang af relativitetsteori i gymnasiet[1] forbereder jeg ved at fortælle om det mekaniske verdensbillede. Fra det syttende århundrede citerer jeg Huygens, som i »Traité de la Lumière» siger: »I de sande videnskaber kan årsagerne til alle virkninger kun forstås ad mekanisk vej» »par des raisons de mechanique». Fra det nittende århundrede citeres lord Kelvin: »Skal jeg forstå et fysisk fænomen, må jeg have en mekanisk model». Jeg fortæller om varmelærens mekanisering gennem den kinetiske molekylarteori og om de forgæves forsøg på at mekanisere de elektriske fænomener ved hjælp af æterhypotesen. Æteren skildres som et stort stillestående hav, der giver Newtons ellers fiktive årsag »spatium absolutum» en reel eksistens, og som skulle være sædet for elektriske og optiske fænomener.

Vi er nu nået hen mod slutningen af det nittende århundrede, og jeg fortæller om fysikkens daværende krisetilstand på grund af de alvorlige vanskeligheder, fysikerne havde med at forklare elektriske herunder optiske fænomener i bevægede legemer. Michelsons forsøg fra 1881 gennemgås skematisk. Derefter omtales, at man ikke havde tilsvarende vanskeligheder ved forklaringen af mekaniske fænomener, idet de newtonske love ikke alene gælder i et koordinatsystem i hvile i forhold til rummet, efter Mach i forhold til fiksstjernerne, men også i ethvert koordinatsystem, som er i jævn bevægelse i forhold til fiksstjernerne, såkaldte inertialsystemer, d. v. s. systemer, hvori inertiens lov gælder. I overensstemmelse hermed er Newtons bevægelsesligning invariant, uforandret, overfor den transformation, som i den klassiske fysik fører fra et inertialsystem over til et andet: Galilei-transformationen. For nemheds skyld er de to koordinatsystemer K og K' lagt, så de to X-akser glider langs hinanden (se fig.). K's hastighed i forhold til K er v. Man har da $x'=x-vt$, $y'=y$, $z'=z$. Af disse ligninger fås:



$$\frac{dx'}{dt}=\frac{dx}{dt}-v,\quad \frac{dy'}{dt}=\frac{dy}{dt},\quad \frac{dz'}{dt}=\frac{dz}{dt}.$$

Videre fås: $\frac{d^2x'}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}$ og analoge.

[1] Saml. Søren Sikjær, Elementer af Einsteins Relativitetsteori, J. Gjellerups forlag, København, 1938.

En partikkels acceleration er altså den samme i forhold til K og K'. Da kraft og masse efter Newton er absolutte størrelser, har vi dermed set, at Newtons bevægelsesligning er invariant overfor en Galilei-transformation. I den klassiske mekanik gælder et relativitetsprincip, som siger, at de mekaniske love er ens i alle inertialsystemer. Imidlertid er de elektriske grundlove, de maxwellske ligninger, som jeg tager med i elektricitetslæren i kvalitativ form, ikke invariante overfor en Galilei-transformation, og Hertz' forsøg på at ændre dem så de blev det, førte ikke til resultater, som stemmer med erfaringen.

Lorentz antog derfor i sin elektronteori, at de maxwellske ligninger kun gælder i et koordinatsystem, som er i hvile i forhold til æteren. Lorentz blev ved med at fastholde denne grundtanke; men efterhånden som han tvunget af erfaringerne ændrede sine teorier, kom han mere og mere i overensstemmelse med et relativitetsprincip også for de elektriske fænomener. Det negative udfald af Michelsons forsøg, Michelson ville jo påvise jordens bevægelse i forhold til æteren, tvang Lorentz til at antage, at en stang, som i hvile i forhold til æteren har længden l_0, har længden $l=l_0\sqrt{1-v^2/c^2}$, når den bevæges med hastigheden v i sin længderetning i forhold til æteren; c er lysets hastighed. Lorentz kunne iøvrigt bevise formlen, når han antog, at alle kræfter er af elektrisk natur.

Tilsidst nåede Lorentz frem til den berømte Lorentz-transformation:

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

overfor hvilken de maxwellske ligninger er invariante. x, y og z er koordinaterne for en hændelse i K, som indtræder til tidspunkt t. I K' er samme hændelses stedkoordinater x', y', z', og den indtræder til tidspunktet t'. Vi ser, at tiden også transformeres; men Lorentz opfattede tiden t i K, der tænkes i hvile i forhold til æteren, som den sande eller absolutte tid, medens t' er en kunsttid eller en slags stedtid, som det er bekvemt at bruge i det bevægede system. Det ses, at når v er lille i forhold til c, går Lorentz-transformationen over i Galilei-transformationen. — Endnu stod Lorentz på æterhypotesens grund til trods for, at det efterhånden blev tydeligt, at æteren unddrog sig enhver iagttagelse, og opretholdelsen af begrebet derfor stred mod Keplers princip om iagttagelighed. Poincaré derimod postulerer, at relativitetsprincippet gælder for alle fysiske fænomener.

Sådan var situationen, da Einstein i 1905 udsendte sin epokegørende afhandling »Zur Elekrodynamik bewegter Körper». Man skulle ikke tro, at meget var ladt tilbage til Einstein, når både Lorentz-transformationen og relativitetsprincippet var opstillet. Men det var der. Einstein viser, at årsagen til krisetilstanden ligger der, hvor ingen havde

ventet at finde fejl, nemlig i de newtonske forestillinger om rum og tid, der endog af Kant var ophøjet til at være apriorisk rigtige. Einstein siger: »I enhver elektrodynamik for bevægede legemer må indgå overvejelser over ures og faste legemers bevægelser, og roden til alle vanskeligheder må søges i, at man ikke med tilstrækkelig omhu har givet agt på disse forhold».

Einstein bygger på to grundlæggende principper: Relativitetsprincippet (alle fysiske love har samme form i ethvert inertialsystem) og princippet om lyshastighedens konstans (lysets hastighed er den samme i forhold til enhver iagttager). Det sidste princip kan gennem de maxwellske ligninger afledes af det første. Æteren udgår som fysisk begreb. Det ses straks, at princippet om lyshastighedens konstans går på tværs af vore sædvanlige forestillinger og er i strid med Galilei-transformationen ($dx'/dt = dx/dt - v$). Galilei-transformationen må altså være forkert. Dette vil straks blive bestridt af eleverne, og der følger nu en frugtbar meningsudveksling, hvor eleverne ledes frem til at forstå, at Galilei-transformationen ikke er selvindlysende rigtig, men i virkeligheden bygger på to forudsætninger: 1) Man får samme værdi for længden af en bestemt stok, hvad enten man måler den siddende i K eller siddende i K'. 2) Tidsrummet mellem to begivenheder er det samme for en iagttager i K og en iagttager i K'. Disse forudsætninger stemmer ved små hastigheder, dog ikke fuldstændig eksakt, og de svigter totalt, når K's hastighed i forhold til K nærmer sig lysets. Her oplever eleverne noget egentligt og får en nyttig belæring om, hvor forsigtig man skal være med at generalisere.

Vi betragter igen de to inertialsystemer K og K', og vor opgave er nu at finde de transformationsformler, som fører fra det ene system til det andet, idet vi går ud fra relativitetsprincippet og princippet om lyshastighedens konstans. Da vi åbenbart ikke har givet tilstrækkelig agt på »ures og målestokkes forhold», må disse fastlægges ved omhyggelige definitioner. Her omtales selvfølgelig navnlig Einsteins epokegørende erkendelse af, at samtidighed af begivenheder på forskellige steder må fastlægges gennem en definition. Det vil nok falde eleverne lettest, hvis ure anbragt på forskellige steder i et inertialsystem tænkes stillet efter hinanden på den måde, at man vælger at gå ud fra et bestemt ur. Herfra udsendes et lyssignal til et andet ur, som ønskes stillet efter det udvalgte. Viser dette t, når lyssignalet afsendes, og er afstanden mellem de to ure l, skal det andet ur vise $t + l/c$, når lyssignalet ankommer til det. Jeg har ikke selv ved min gennemgang af relativitetsteori i gymnasiet rejst spørgsmålet, om hvorvidt to ure, der i øjeblikket samtidigt viser det samme, også bliver ved med det, eller spørgsmålet om, hvorvidt to ure, der samtidigt viser det samme som samme tredie, også indbyrdes

viser det samme. Men er en elev kommet ind på disse problemer, har hans spørgsmål naturligtvis givet anledning til en kærkommen drøftelse. I ethvert punkt i K findes et ur i hvile i forhold til K, og alle disse ure er indstillet, så de samtidigt viser det samme. Nøjagtig det samme gælder for K'.

Den simple naturlige metode vi her har anvendt til at stille urene i et inertialsystem efter hinanden medfører til elevernes overraskelse, at to begivenheder, som er samtidig for en iagttager i K ikke behøver at være det for en iagttager i K'. Vi har f. eks. to lynnedslag, der rammer x-aksen i A og B og x'-aksen i A' og B'. Vi tænker os, at en iagttager i midtpunktet M af AB ser lynnedslagene samtidigt. Han vil da, fordi afstandene til A og B er lige store, og fordi lyshastigheden er konstant, sige at lynnedslagene var samtidige. En iagttager i midtpunktet M' af $A'B'$ vil ikke se lynnedslagene samtidigt. Lysbølgerne fra lynnedslagene mødes i M, og M' er på grund af K's bevægelse i forhold til K kommet lidt forbi M. Da lyshastigheden også er konstant i K', og der er lige langt fra M' til A' og B', vil iagttageren i M' sige, at lynnedslagene ikke var samtidige. Spørger man eleverne om, hvem der har ret, vil de mindre eftertænksomme være tilbøjelige til at give iagttageren i K fortrinet; men det er ikke svært at gøre dem begribeligt, at de så har ladet tavlen spille æterens rolle, og at man, når æteren ikke eksisterer, ikke kan give den ene iagttager fortrinet frem for den anden. Samtidigheden af to begivenheder på forskellige steder er relativ.

Før vi går over til at udlede de transformationer, der fører fra K til K', vil vi indføre et par vigtige begreber. Vi har en bestemt stang. Ved stangens hvilelængde l_0 vil vi forstå den længde, vi måler, når den anvendte målestok er i hvile i forhold til stangen. Ved stangens vandrelængde l_v, det er et hjemmelavet udtryk, som jeg imidlertid synes er godt, vil vi forstå afstanden mellem to på en målestok afsatte mærker, som markerer en samtidig stilling af stangens forende og bagende, idet stangen bevæger sig langs med målestokken og med hastigheden v i forhold til denne. Samtidigheden er bestemt ved ure, som er i hvile i forhold til målestokken. Da der i definitionen på vandrelængde indgår det relative samtidighedsbegreb, kan vi ikke vente, at vandrelængden af en stang er lig hvilelængden. Vi antager, at $l_v = \alpha \cdot l_0$, hvor α er en funktion af v.

Vi betragter igen vore to inertialsystemer K og K'. I begge bruges samme slags målestokke og samme slags ure, alt af bedste kvalitet. Ure, som hører til samme inertialsystem, d. v. s. er i hvile i forhold til systemet, er indstillet sådan, at de samtidigt viser det samme. Idet begyndelsespunkterne for K og K' passerer hinanden, lader man urene her begge vise nul. Vi tænker os nu, at en fysiker F i K og en

fysiker F' i K' iagttager samme begivenhed, f. eks. sammenstødet mellem to meteorsten. Eleverne forstår, at da æteren er afskaffet må vi tale om begivenhed eller hændelse i stedet for om rumpunkt, og tiden kommer til at optræde analog med koordinaterne. Verden bliver firedimensional. Meget mere siger jeg ikke om den firedimensionale formulering af relativitetsteorien, fordi en behandling heraf i gymnasiet let bliver til en popularisering, som forvirrer mere end den klarer begreberne. Jeg fremhæver, at Lorentz har ret, når han i et foredrag holdt i Göttingen i 1910 betegner rum og tid som »etwas völlig verschiedenes».

Vi vender tilbage til sammenstødet mellem de to meteorsten. F finder, at sammenstødet skete i (x, y, z) til tiden t. F' finder, at sammenstødet skete i (x', y', z') til tiden t'. Da vi har set, at tiden bedømmes anderledes fra K end fra K', tør vi ikke forudsætte, at $t=t'$. Det er nu vor opgave, idet vi går ud fra relativitetsprincippet og princippet om lyshastighedens konstans, at finde de formler, som skal erstatte Galilei-transformationen. x' er hvilelængden af et stykke materie i x' aksen. F finder, at vandrelængden for dette stykke er $x-vt$, altså

$$\alpha x'=x-vt \tag{1}$$

På tilsvarende måde fås

$$\alpha x=x'+vt'$$

idet vi forudsætter, at Ks hastighed i forhold til K' er $-v$, og at $\alpha(v)$ er lig $\alpha(-v)$. Heraf fås

$$\alpha t'=\frac{\alpha^2-1}{v}x+t \tag{2}$$

og

$$\frac{x'}{t'}=\frac{\frac{x}{t}-v}{\frac{\alpha^2-1}{v}\cdot\frac{x}{t}+1}$$

Den sidste ligning sammenknytter en partikkels eller et signals hastighed $u=x/t$ i forhold til x aksen med hastigheden $u'=x'/t'$ i forhold til x' aksen

$$u'=\frac{u-v}{\frac{\alpha^2-1}{v}u+1} \tag{3}$$

Er signalet et lyssignal, har vi ifølge princippet om lyshastighedens konstans $u=u'=c$. Indsættes dette i (3), fås $\alpha=\sqrt{1-v^2/c^2}$. Indsættes den fundne værdi for α i (1) og (2) fås:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ og } t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Det ses straks, att $y' = y$ og $z' = z$. Hvis nemlig $y' = \beta(v)y$, så er $y = \beta(-v)y'$. Hvoraf fås $\beta(v) \cdot \beta(-v) = 1$, hvilket, da $\beta(v)$ antages at være lig med $\beta(-v)$, medfører, at $\beta(v) = 1$, d. v. s. $y' = y$.

Løses ligningerne med hensyn til x, y, z, og t fås:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

I relativitetsteorien kommer man altså til de samme transformationsformler som Lorentz, og de kaldes da også Lorentz-transformationen til trods for, at de er udledt på et langt mere alment grundlag, uden forudsætninger om stoffets struktur, og har et helt andet begrebsmæssigt indhold. Tiden i det ene koordinatsystem er ikke mere sand end i det andet. I en afhandling fra 1907 i Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik siger Einstein, at det er overraskende, at så lille en ændring som at gå over fra Lorentz' stedtid til systemets tid kan løse alle vanskeligheder.

Efter at Lorentz-transformationen er udledt, gennemgår jeg nogle af de konsekvenser, der kan drages udfra den, idet jeg stadig sikrer mig, at eleverne tilfulde forstår de afledede resultater, og viser, at den specielle relativitetsteori er fuldstændig anskuelig og kun forekommer fremmedartet, fordi vi er uden erfaringer ved hastigheder op imod lysets. Det bemærkes, at alle resultater bliver trivielle ved hastigheder, der er små i forhold til lysets. Jeg lægger stor vægt på, at eleverne bliver klar over, at teorien er eksperimentelt underbygget.

En af de ting, jeg behandler grundigt, er Lorentz-forkortningen. Den fås straks ud fra $l_v = \alpha \cdot l_0$, idet $\alpha = \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Forskellen mellem Lorentz og Einsteins opfattelse fremhæves. v er her stangens hastighed i forhold til iagttageren og ikke som hos Lorentz hastigheden i forhold til æteren. Hos Lorentz er forkortningen forårsaget af bevægelsen i forhold til æteren. Her er den en relation mellem iagttageren og stangen og ikke en egenskab ved stangen. Jeg plejer at anvende Weyls udtryk »Geschwindigkeitsperspektive». På den anden side må eleverne naturligvis gøres begribelig, at fænomenet ingenlunde er fiktivt, og jeg plejer at omtale Einsteins afhandling fra 1911 i Phys. Ztsch., hvor han viser, at det principielt er muligt at måle Lorentz-forkortningen uden anvendelse af ure. To ens stænger bevæger sig i modsat retning langs en målestok. Den ene stang har hastigheden v i forhold til målestokken, den anden $-v$. Idet de to ens stængers ender passerer hinanden, markeres stederne på målestokken, Afstanden mellem de afsatte mærker er vandrelængden, og det kan

principielt undersøges, om formlen $l_v = l_0 \sqrt{1-v^2/c^2}$ stemmer. Spørges der om årsagen til Lorentz-forkortningen, er spørgsmålet lige så irrelevant, »som hvis man spurgte om årsagen til, at et legeme, der ikke er påvirket af andre legemer, bevæger sig efter en ret linie med konstant fart. Sådan kan der ikke spørges hos Galilei, men nok hos Aristoteles». Lorentz-forkortningen er hos Einstein et grundfænomen, som ikke kan føres tilbage til noget simplere. Lorentz-forkortningen fås naturligvis også udfra Lorentz-transformationen. Af $x'=(x-vt)/\sqrt{1-v^2/c^2}$ fås for fastholdt t, $dx=dx'\sqrt{1-v^2/c^2}$; dx' er hvilelængden, og dx er vandrelængden, idet F er iagttageren. Af $x=(x'+vt')/\sqrt{1-v^2/c^2}$ fås, for fastholdt t', $dx'=dx\sqrt{1-v^2/c^2}$. F' er nu iagttageren og dx er hvilelængden, medens dx' er vandrelængden. F og F' finder gensidigt, at den andens målestokke er forkortede. Lorentz-forkortningen kan siges at være eksperimentelt bevist gennem Michelsons forsøg.

Dernæst plejer jeg at betragte urretardationen, der iøvrigt for første gang blev udtrykkelig angivet i Einsteins første afhandling om relativitetsteori fra 1905. Vi har $t=(t'+vx'/c^2)/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Betragter vi uret i K's begyndelsespunkt, d. v. s. $x'=0$, fås $t'=t\sqrt{1-v^2/c^2}$. Ifølge uret i bevægelse er der gået t' sekunder siden begyndelsespunkterne passerede hinanden. Ifølge det hvilende ur (F er iagttageren) er der gået t sekunder. Et ur i bevægelse går altså langsommere end et hvilende. Det er retarderet. F mener, at F's ure går for langsomt. Omvendt mener F', at det er Fs ure, som går for langsomt. F og F' er jo efter relativitetsprincippet ligestillede. Vi får da også af $t'=(t-vx/c^2)/\sqrt{1-v^2/c^2}$, for $x=0$, at $t=t'\sqrt{1-v^2/c^2}$. Dette kan naturligvis også afledes af $t=(t'+vx'/c^2)/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Vi ser på uret i Ks begyndelsespunkt, for det er $x'=-vt'$, og vi får $t=t'\sqrt{1-v^2/c^2}$. Fænomenet skal opfattes på samme måde som Lorentz-forkortningen. Det er i samme grad »reelt» og kan måles uafhængig af samtidighedsdefinitionen. Einstein har allerede dette med i afhandlingen fra 1905 som »en ejendommelig konsekvens». To ens ure befinder sig i et punkt A i et inertialsystem. Det ene ur bevæger sig med hastigheden v i forhold til inertialsystemet fra A til B og tilbage igen med hastigheden $-v$. Har turen taget t sekunder efter uret, som forblev i A, har den kun taget $t\sqrt{1-v^2/c^2}$ sekunder efter det bevægede ur. Vi har jo her begyndelsen til det berømte urparadoks, der som bekendt først kan opløses i den almindelige relativitetsteori. Gennem iagttagelse af de radioaktive nedbrydningsprocesser i hurtigt bevægede mesoner i kosmisk stråling har man kunnet vise rigtigheden af formlen $t'=t\sqrt{1-v^2/c^2}$. Faktoren $\sqrt{1-v^2/c^2}$ kan blive af størrelsesordenen 1/100. De radioaktive processer går da 100 gange langsommere end normalt, og halveringstiden bliver 100 gange større. Iøvrigt blev urretarda-

tionen i form af transversal dopplereffekt påvist af Ives og Stilwell i 1938 ($\nu=\nu_0\sqrt{1-v^2/c^2}$).

I formlen $t'=(t-vx/c^2)/\sqrt{1-v^2/c^2}$ betyder t' jo klokkeslettet aflæst på det ur i K' som i K til tiden t har abscissen x. Det ses, at til et bestemt klokkeslet t i K viser urene i K' mindre og mindre i bevægelsesretningen. De viser altså ikke efter *Fs* mening samtidigt det samme. *F'* mener selvfølgeligt omvendt, at det er *Fs* ure, der ikke samtidigt viser det samme, men mindre og mindre i *Ks* bevægelsesretning set fra K'. Dette ses af $t=(t'+vx'/c^2)/\sqrt{1-v^2/c^2}$ eller om man vil af $t'=(t-vx/c^2)/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Vi er altså efterhånden kommet til følgende resultater:
Begge de to iagttagere *F* og *F'* mener, at deres egne målestokke er i orden, og at deres egne ure går rigtigt og samtidigt viser det samme. Derimod mener hver især, at den anden anvender målestokke, som er for korte, og ure, der går for langsomt og desuden ikke samtidigt viser det samme. De to iagttagere *F* og *F'* er fuldstændig ligestillede, og undersøger de hver især naturen, kommer de ifølge relativitetsprincippet til de samme fysiske love.

F og *F'* kan naturligvis gensidigt følge hinandens målinger og kan hver især indse, hvorfor den anden kommer til sine resultater. For at belyse dette har jeg brugt følgende eksempel. *F* måler længden af en meterstok, der følger med K' liggende fra O' langs x' aksen i positiv retning. På grund af Lorentz-forkortningen får *F*, at længden kun er $\sqrt{1-v^2/c^2}$ m. *F'* vil om *Fs* måling sige: »*F* markerede meterstokkens forreste og bagerste endepunkt, da *Fs* ure disse to steder begge viste nul (»sammenfald af begivenheder», her viseren og et tal, er absolut). Imidlertid viser *Fs* ure jo efter *F'* ikke samtidigt det samme, og det endepunkt, som har positiv abscisse i K' markeres før det andet efter *F'*s mening. Eleverne skal derefter som en øvelse vise, at *F'* også kvantitativt kan forudse *Fs* resultat.

Da $\sqrt{1-v^2/c^2}$, som indgår i vore formler, skal være en reel størrelse, må v være mindre end c. Lyshastigheden er altså maksimalhastighed for et signal. Dette er i overensstemmelse med Einsteins formel for addition af hastigheder. Vi har tidligere fundet, at $u'=\dfrac{u-v}{\dfrac{a^2-1}{v}u+1}$ (3).

Indsættes $a=\sqrt{1-v^2/c^2}$, fås $u'=(u-v)/(1-uv/c^2)$. Løses ligningen med hensyn til u fås $u=(u'+v)/(1+u'v/c^2)$. For $u'=c$ fås $u=c$.

Som konsekvens af eksistensen af en maksimalhastighed nævnes, at der ikke findes absolutte faste legemer, og eleverne får som opgave at finde betingelsen for, at to hændelser på forskellige steder kan blive samtidige for en iagttager i passende bevægelse. De herhen hørende forhold diskuteres.

Einsteins formel til addition af hastigheder knyttes til erfaringen gennem Fizeaus forsøg fra 1851. Et gennemsigtigt legeme med brydningsforholdet n bevæger sig med hastigheden v i forhold til laboratoriet. I legemet bevæger en lysstråle sig i legemets bevægelsesretning. Fizeau fandt, at lysstrålens hastighed i forhold til laboratoriet var $\frac{c}{n}+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)v$ i overensstemmelse med Fresnels formel. Fresnel udledte som bekendt sin formel ud fra den elastiske æterteori. Efter denne er ætertætheden i et legeme med brydningsforholdet n lig med $n^2\varrho$, hvor ϱ er æterens tæthed i det tomme rum. Kun den overskydende æter følger med et legeme i dettes bevægelse. Tyngdepunktets hastighed er følgelig $\frac{n^2\varrho-\varrho}{n^2\varrho}v=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)v$. Lysstrålens hastighed i forhold til æteren, d. v. s. i forhold til dens tyngdepunkt er c/n. Hastigheden af lysstrålen i forhold til laboratoriet er da $\frac{c}{n}+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)v$. Efter Einstein former udledelsen sig helt anderledes uden specielle antagelser af nogen art:

$$u=\frac{c/n+v}{1+cv/nc^2}\approx\frac{c}{n}+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)v.$$

når v er lille i forhold til c.

Mere stof fra relativitetsteorien end det nævnte har jeg ikke ment at kunne finde tid til; men til gengæld bliver det medtagne gennemdiskuteret særdeles grundigt, og eleverne får lejlighed til en betydelig selvvirksomhed. Jeg afrunder ved oversigtsmæssigt at fortælle om, hvordan den relativistiske mekanik er opbygget. Da den newtonske bevægelsesligning ikke er forminvariant overfor en Lorentztransformation, kan den kun være en tilnærmelse til den, som også er gyldig ved store hastigheder. Af konsekvenser omtales selvfølgelig navnlig, at stof er en form for energi eller om man vil, at energi har masse. Iøvrigt henviser jeg eleverne til at læse resten af ovenfor nævnte lille bog.

Ellipsens och hyperbelns ekvationer

Av lektor Conrad Lönnqvist, Södertälje

Ellipskurvan definieras vanligen genom den konstanta summan av brännpunktsradierna. Men man kan också definiera ellipsen som projektionen av en cirkel på ett plan som skär cirkelns plan. Om man då utgår från cirkelns ekvation $x^2+y^2=a^2$, har man ju endast att låta t. ex. ordinatorna förkortas i proportionen b/a (=cosinus för vinkeln mellan planen) och man får för ellipskurvans koordinater ekvationen $x^2+a^2y^2/b^2=a^2$ eller $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

Om man nu definierar ellipsen på sistnämnda sätt, så uppstår problemet, hur man skall få fram den viktiga egenskap hos ellipsen som annars brukar utgöra dess definition, den konstanta summan av brännpunktsradierna. Det kan ske t. ex. på följande sätt.

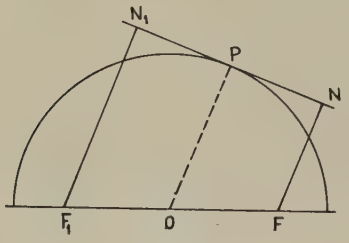


Fig. 1.

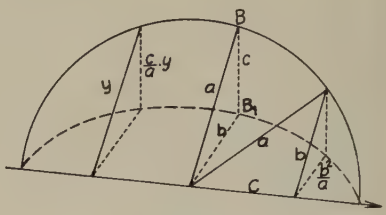


Fig. 2.

I en godtycklig punkt P på den cirkel som skall projicieras är en tangent dragen (fig. 1), och mot denna är fällda normaler från de punkter F och F_1 som skall bli den genom projektionen erhållna ellipsens brännpunkter.

Man kan då bevisa, att normalerna FN och F_1N_1 är lika långa som brännpunktsradierna för den punkt på ellipsen som utgör projektionen av punkten P på cirkeln.

Eftersom summan $FN+F_1N_1$ tydligen är $=2\cdot OP=2a$, så är därmed brännpunktsradiernas konstanta summa härledd.

Beviset för de nämnda normalernas likhet med brännpunktsradierna är tämligen enkelt. Men det kan vara lämpligt att först i en projektionsbild (fig. 2) visa sambandet mella a, b och c och hur c erhålls vid själva projektionen. Om cirkelns högsta punkt B har projektionen B_1, halva lillaxelns ändpunkt, så är tydligen $BB_1=\sqrt{a^2-b^2}$, en stor-

net som vi betecknar c. Går man sedan till en punkt på cirkeln vars ordinata är b, så är tydligen dess abscissa c. Där har man alltså brännpunkten. (F. ö. inser man därav lätt att halva parametern är b^2/a.)

I figur 3 är P_1 den punkt på ellipsen som svarar mot punkten P på cirkeln och FN är normalen från F mot cirkeltangenten i P. Det gäller nu att bevisa, att brännpunktsradien FP_1 är lika med normalen FN. Man har då att jämföra de rätvinkliga trianglarna FPP_1 och FPN och visa upp, att kateterna PP_1 och PN är lika stora. Man kan då teckna ytan av triangeln OFP på två olika sätt och finner, då PH är höjd mot OF och höjden mot OP är $=PN$, följande likhet $OP \cdot PN = OF \cdot PH$ eller $a \cdot PN = c \cdot PH$ eller $PN = \frac{c}{a} \cdot PH$. Men enligt projektionsreglerna (fig. 2) måste PP_1 vara $\frac{c}{a} \cdot PH$. Alltså är $PN = PP_1$ och $FN = FP_1$. För brännpunktsradien från F_1 sker beviset på samma sätt.

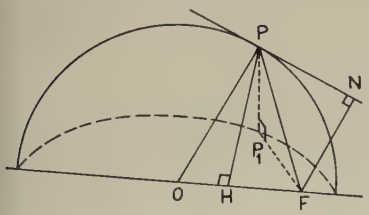


Fig. 3.

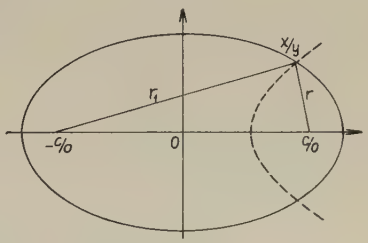


Fig. 4.

Detta är alltså ett enkelt geometriskt sätt att härleda, att summan av ellipsens brännpunktsradie är konstant $=2a$. — En snarlik härledning återfinnes enligt lektor Josef Andersson i en fransk lärobok i geometri.[1]

Då vi nu härlett ellipsekvationen utan att utgå från den vanliga definitionen och likväl fått fram ellipsens fundamentala egenskap, kan man fråga, om man kan gå vidare och härleda även hyperbelns ekvation utan att använda avståndsformlerna med tillhörande sedvanliga räkningar. Här har man ingen projektion att utgå ifrån, utan man måste bygga på den konstanta skillnaden mellan brännpunktsradierna. Men förutom detta kan man bygga på ellipsekvationen.

[1] Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, Traité de géométrie, Vol. II. Gauthier-Villars, Paris 1922, p. 335.

För varje punkt $(x; y)$ på ellipsen (fig. 4) har man nu de kända formlerna för brännpunktsradierna $r_1 = a + \frac{c}{a}x$, $r = a - \frac{c}{a}x$.

Om vi håller oss till högra hyperbelgrenen, vill vi nu, att $r_1 - r$ skall vara en konstant, som lämpligen kan betecknas $2A$.

Man har alltså $2A = 2\frac{c}{a}x$. Här är emellertid nu a en variabel, medan c är konstant. Det gäller att variera a och b så att skillnaden mellan brännpunktsradierna blir den önskade $= 2A$. Man har då $a = \frac{c}{A}x$. Insätter man detta i ellipsens ekvation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

får man efter hyfsning

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{c^2 - A^2} = 1$$

Om nu $c^2 - A^2$ betecknas B^2, finner man att vid hyperbeln $c^2 = A^2 + B^2$. Insätter man sedan i formlerna för r och r_1 värdet $a = \frac{cx}{A}$, får man $r_1 = \frac{cx}{A} + A$ och $r = \frac{cx}{A} - A$.

För vänstra hyperbelgrenen erhåller man motsvarande uttryck med ändrade tecken.

Notiser

Demonstration av tobaksrökens beståndsdelar

Vid rökning övergår tobakens organiska substans i gasform genom torrdestillation, krackning och förbränning vid temperaturer upp till 700° C, och vid avsvalnandet kondenseras ämnen med högre kokpunkt till små droppar, som blir synliga såsom rök. En del av rökens beståndsdelar (benspyren, koloxid, nikotin) är av specifik fysiologisk verkan, medan den övervägande delen utgöres av en odefinierad blandning av tjärsubstanser, eteriska oljor och olika andra organiskkemiska produkter. Tillsammans framkallar de den retning som rökaren förnimmer, betecknas av den medicinska expertrisen som hälsofarliga, och uppfattas i allmänhet i olika sammanhang som förorenande. Att det därvid inte är fråga om små mängder, kan åskådliggöras t. ex. medelst en apparatur liknande den i fig. 1 återgivna, i vilken en cigarrett »rökes» på maskinell väg, varvid cigarretten avrökes restlöst.

Röken från en tänd cigarrett suges genom ett vägt filter, Munktell nr 5 av 11 cm i diameter, som är lagt mellan två glastrattar, vilka tätas medelst ringar av skumgummi. Luftströmmen regleras så att den filtrerade luften är fri från rökpartiklar och förbränningen slutförd inom två minuter. Filtret brunfärgas därvid och antar stark nikotinlukt. Av en vanlig cigarrett, som väger ett gram, blir viktsökningen efter lufttorkning i medeltal 0,1 g, av en filtercigarrett (av

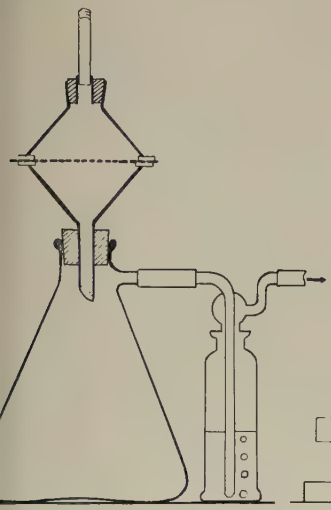


Fig. 1

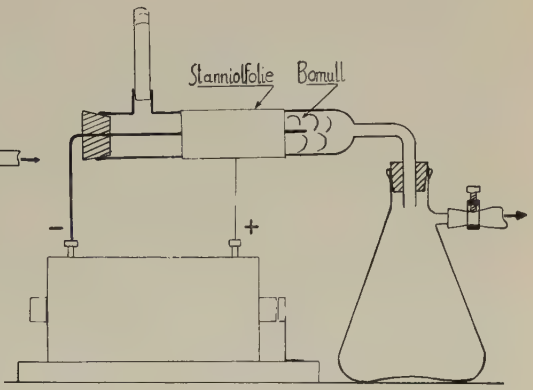


Fig. 2

märket »Star», Sv. Tobaksmonopolet) 0,05 g. De filtrerade rökgaserna ledes genom en tvättflaska med palladiumklorurlösning, varvid lösningen om en stund svärtas genom bildning av en mörkfärgad finfördelad fällning i riklig mängd. I stället för palladiumklorur kan användas andra reagens, som ger utslag med reducerande ämnen, t. ex. ammonialkalisk silvernitrat eller utspädd $KMnO_4$-lösning. För demonstration av koldioxid utbytes lösningen mot kalkvatten.

Tjärsubstansen kan påvisas även direkt genom att fylla en 3-litersflaska med röken från en cigarrett. Efter en halvtimme har den vita röken slagit sig ned på kärlets botten, på vilken blir synliga gulaktiga oljedroppar.

Vid genomgång av aerosolerna har läraren osökt tillfälle att demonstrera för klassen elektrisk gasrening medelst cottrellförfarandet, varvid tobaksrök är ett lämpligt försöksobjekt. Vid en försöksanordning som den i fig. 2 kvarhålles rökpartiklarna på ett markant sätt när högspänningen är påkopplad. *Wold. Lindquist*

Cinemascopeprojektion

De flesta biografer visar numera cinemascopefilm, varför det kan vara lämpligt att i undervisningen på gymnasiet visa, hur en projektor för sådan film fungerar. Filmrutan är vid cinemascopefilm av samma storlek som vid vanlig film och är nästan kvadratisk (ca 18 mm · 22 mm), medan bilden på vita duken är mer än dubbelt så bred som hög.

Projektionen kan demonstreras på följande sätt: Diapositivet utgöres helst av en riktig filmruta för cinemascope eller i brist därpå av en glasskiva, på vilken man ritat en kvadrat med 1 cm sida. (Pelikan Fount India Füllhaltertusche är ett reservoirpennbläck, som fäster bra på glas.) Man ställer upp på en optisk bänk i ordning en lampa i lamphus (0, siffran anger läget i cm), asfärisk kondensorlins (7) — eller i brist därpå en vanlig lins med 5 cm brännvidd — lins med 12 cm brännvidd (10), diapositivet (13) samt en lins med 10 cm brännvidd (ca 24) som objektiv. Som bildskärm fungerar exempelvis en vägg på ca 3 m avstånd. På denna erhålles efter justering av den sistnämnda linsen en ordinär bild. Man skjuter slutligen lampan i huset, så att jämnaste och kraftigaste belysning erhålles på bilden. Glödtråden avbildas då av kondensorlinserna nära objektivlinsen.

Sedan man sett, hur diapositivet i verkligheten ser ut, borttages objektivlinsen och ersättes av en cylinderlins (ca 21) med ca 8 cm brännvidd och lodrät axel. Cylinderlinsens läge justeras, så att man på bildskärmen ser skarpa lodräta streck. En cylinderlins med brännvidden 16 å 19 cm och axeln vågrät placeras framför den förra linsen (34) och justeras, så att en skarp bild framträder på skärmen. Till sist kan lampan behöva justeras något. (Cylinderlinsernas axlar måste vara noga vinkelräta mot varandra, annars blir bildskärpan dålig.)

Vid projektion av cinemascope på en biograf går det emellertid litet annorlunda till. Eftersom biograferna tidigare hade vanliga projektorer, valde man att göra en cinemascopetillsats med två cylinderlinser. Denna tillsats fungerar som en teaterkikare, men den förstorar blott i vågrät led, eftersom linsaxlarna är lodräta. Man visar lätt, hur en vanlig teaterkikare förstorar den bild, som projicieras av en vanlig småbildsprojektor — såsom den nyss konstruerade — eller ett diaskop, om man håller kikaren omedelbart framför projektorn med objektivet vänt mot projektorn. Med den svaga positiva cylinderlinsen och en stark negativ cylinderlins (brännvidd — 8 cm), båda med lodräta axlar, kan man på motsvarande sätt förstora endast i vågrät led.

Bengt Liljeqvist

Ett problem inom termokemi

Vid tillämpning av Hess lag för beräkning av bildnings-, förbrännings- etc. värmen ($-\Delta H$) får man ofta ett system med många reaktionsformler, som det gäller att kombinera så, att sökt reaktion erhålls. Det kan ibland vara besvärligt att finna denna kombination. Nedan visas ett knep härför, vilket betydligt underlättar problemets lösande.

Exempel. Sök med hjälp av följande uppgifter, som gäller vid 18° C och 1 atm, ΔH då 1 mol sulfurylfluorid, SO_2F_2, bildas ur grundämnena vid 18° C. Då 1 mol sulfurylfluorid får reagera med utspädd kalilut, bildas sulfat- och fluoridjoner och frigörs 87,6 kcal. Bildningsvärmet för flytande vatten är 68,4 kcal/mol. Ur tabeller har följande värden hämtats för ΔH för de tänkta reaktioner då 1 mol a) KOH, b) K_2SO_4, c) KF bildas ur grundämnena och löses i vatten i stort överskott: a) −114,85 kcal, b) −331,9 kcal, c) −138,2 kcal. (Problemet hämtat ur Högfeldt, Lundgren och Sillén, Kompendium i stökiometri och jämviktslära, KTH studentkår, 1955.)

Enligt problemet gäller:

(1) $SO_2F_2+4K^++4OH^-+aq \rightarrow 4K^++SO_4^{2-}+2F^-+aq+2H_2O_{(l)}+\ 87{,}6$
(2) $2H_2 + O_2 \rightarrow +2H_2O_{(l)}+2\cdot\ 68{,}4$
(3) $2K + O_2 + H_2 +aq \rightarrow 2K^++2OH^- +aq +2\cdot 114{,}85$
(4) $2K +2O_2 + S +aq \rightarrow 2K^++SO_4^{2-} +aq +\ 331{,}9$
(5) $2K + F_2 \rightarrow 2K^+ + 2F^- +2\cdot 138{,}2$

I reaktion (1) kan man givetvis utesluta $4K^+$ på båda sidor om pilen. Man söker x i reaktionsformeln (a): $S+O_2+F_2 \rightarrow SO_2F_2+x$ kcal.

För lösandet bortses nu från kemi och reaktionsformlerna betraktas som ekvationer. Man skriver om (1)—(5) på så sätt, att endast det som står vänster om pilen i (a) kommer till vänster om likhetstecknen:

1) $0=SO_2F_2+4K^++4OH^-+aq-4K^+-SO_4^{2-}-2F^--aq-2H_2O_{(l)}-\ 87{,}6$
1) $O_2 = -2H_2 +2H_2O_{(l)}+2\cdot\ 68{,}4$
1) $0=-H_2 +2K^++2OH^--aq- O_2 +aq-2K +2\cdot 114{,}85$
1) $S = +2K^+ -aq-2O_2+SO_4^{2-}+aq-2K +\ 331{,}9$
1) $F_2 = +2K^+ +2F^--2K +2\cdot 138{,}2$

För att få (a) måste man tydligen addera (1,1)+(2,1)+(4,1)+(5,1). Det framgår då omedelbart, att (3,1) måste multipliceras med −2 för att t. ex. H_2 skall försvinna vid additionen. Om man efter multiplikationen endast adderar termer, som inte tar ut varandra, så fås:

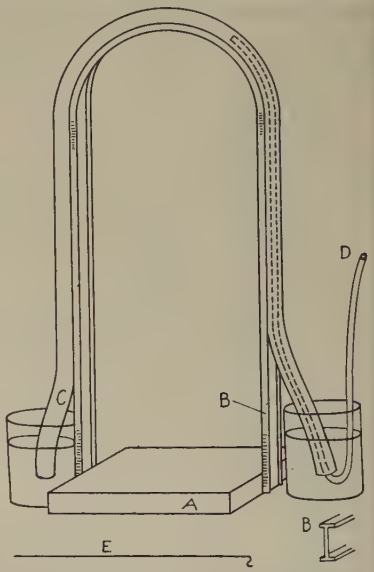
$$S+O_2+F_2=SO_2F_2-87{,}6+136{,}8-459{,}4+331{,}9+276{,}4=SO_2F_2+198{,}1$$

$x=198{,}1$ dvs. $\Delta H=-198{,}1$ kcal/mol.

Karl Eriksson

Apparat för bestämmandet av vätskors specifika vikt

Vidstående figur visar en apparat för bestämmandet av vätskors specifika vikt, som jag särskilt rekommenderar därför att eleverna själva lätt kan bygga den. På träskivan A som underlag fastskruvas en böjd gardinstång B, som kan fås från varje välförsedd järnaffär. I gardinstångens skåra fastsättes en plastslang C på lämpligt sätt. På gardinstångens lodräta sidor limmas mätskalor av mm-papper. Till apparaten hör ännu en tunn plastslang D, som före försöket stickes in i slangen C.



Utförandet av försöket: Slangen C:s ena ända doppas i vatten och den andra i den vätska, vars specifika vikt skall bestämmas. Med hjälp av slangen D suges vätskepelarna till lämplig höjd. Därefter drages slangen D bort, varvid man försiktigt trycker mot det krökta stället med metalltråden E.

Vätskepelarnas höjd avläses från mm-skalorna och spec. vikten beräknas på känt sätt. Apparatens fördel ligger däri, att den inte läcker, emedan ventiler saknas. *Aarre Saarnio*

Luftlinser

En konvex lins av ett material som är optiskt tunnare än omgivningen verkar som spridningslins på infallande ljus. För demonstration av detta brukar man använda en »luftlins» gjord av två urglas och som omgivande medium vatten. Vid tillverkningen av dylika linser brukar det vara svårt att få hållbar tätning. Det går emellertid bra, om man tar två urglas, det ena något mindre än det andra, och limmar fast det mindre på insidan av det större, så att en bikonvex lins bildas. Ett annat sätt är att ta två lika stora urglas och limma fast dem på var sin sida av en glasskiva. Dessa linser kan lätt monteras i trä- eller metallramar.

Som lämpligt lim kan rekommenderas det nya limmet P-LIM, som limmar allt, bl. a. metall på glas. *N. Bertil Nilsson*

Tavellinjaler

brukar efter viss tid slå sig och glider då lätt på tavlan, när man skall använda dem. Ett enkelt sätt att hindra glidning är att på linjalens baksida anbringa en självhäftande tätningslist av skumgummi utefter hela nedre kanten. Lämpligt är att med ett par nubb säkra listen vid vardera änden. På liknande sätt kan förfaras med andra tavelmallar.

N. Bertil Nilsson

Några reflexioner kring ett studentproblem

Nedanstående rader har tillkommit i samband med lösningen av ett studentproblem i matematik, nämligen uppgift nr 5, specialkurs nov. 1956. Uppgiften hade lydelsen:

> En funktion T är definierad på följande sätt: $T=\frac{1}{2}mv^2$, där $v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ och $x=A\sin\omega t$, $y=A\sqrt{2}\sin(\omega t+\frac{1}{3}\pi)$. Storheterna m, A och ω är positiva konstanter. Bestäm de x- och y-värden, för vilka funktionen T antar ett maximivärde.

Man ser genast, att uppgiften har ett underlag, hämtat från mekaniken; x och y anger en partikels läge i ett koordinatsystem som funktion av tiden t; v är partikelns hastighet och T dess kinetiska energi.

Jag genomför räkningarna för det allmännare fallet $x=A\sin\omega t$, $y=B\sin(\omega t+\varphi)$. — Vill man bestämma partikelns bana, elimineras t och man erhåller:

$$x=A\sin\omega t,\quad y=B(\cos\varphi\sin\omega t+\sin\varphi\cos\omega t);$$

$$\frac{x}{A}=\sin\omega t,\quad \frac{y}{B}=\frac{x}{A}\cos\varphi+\sin\varphi\cos\omega t;$$

$$\frac{x}{A}\sin\varphi=\sin\varphi\sin\omega t\quad(1),\quad \frac{y}{B}-\frac{x}{A}\cos\varphi=\sin\varphi\cos\omega t\quad(2).$$

Genom kvadrering och addition av (1) och (2) erhålles efter förenkling

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-2\cdot\frac{x}{A}\cdot\frac{y}{B}\cos\varphi=\sin^2\varphi$$

Denna ekvation betyder en ellips med medelpunkten i origo och inskriven i den rektangel, vars sidor har ekvationerna $x=A$, $x=-A$, $y=B$ och $y=-B$. Ellipsens form och axlarnas läge bestämmes av vinkeln φ.

Går man nu till lösningen av den ifrågavarande uppgiften, dvs. att bestämma partikelns läge, då dess kinetiska energi är maximum, erhålles $v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=A^2\omega^2\cos^2\omega t+B^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi)$ eller $v^2=$ $=A^2\omega^2(1-\sin^2\omega t)+B^2\omega^2[1-\sin^2(\omega t+\varphi)]$ eller $v^2=(A^2+B^2)\omega^2-\omega^2(x^2+y^2)$

eller $v^2=(A^2+B^2)\omega^2-\omega^2r^2$ (3), där r är partikelns avstånd till origo. Av (3), som för övrigt kan skrivas $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}m\omega^2r^2=$konstant, ser man genast, att v^2 (och T) är maximum, då r är minimum, och minimum, då r är maximum. Resultatet blir sålunda, att kinetiska energin är störst i lillaxelns ändpunkter och minst i storaxelns ändpunkter.

Då $r^2=A^2\sin^2\omega t+B^2\sin^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}A^2(1-\cos 2\omega t)+\frac{1}{2}B^2[1-\cos(2\omega t+2\varphi)]$, erhålles $r^2=\frac{1}{2}(A^2+B^2)+\frac{1}{2}B^2\sin 2\varphi\sin 2\omega t-\frac{1}{2}(A^2+B^2\cos 2\varphi)\cos 2\omega t$. För specialfallet i uppgift 5 ($B=A\sqrt{2}$ och $\varphi=\frac{1}{3}\pi$) blir $A^2+B^2\cos 2\varphi\equiv 0$, varför r^2 reduceras till $\frac{1}{2}(A^2+B^2)+\frac{1}{2}B^2\sin\frac{2}{3}\pi\cdot\sin 2\omega t$. Härav följer att r^2 blir min. och därmed T max., då $\sin 2\omega t=-1$, dvs. då $2\omega t=\frac{3}{2}\pi+n\cdot 2\pi$, och härur erhålles lätt motsvarande x- och y-värden, dvs. partikelns läge i specialfallet (se Elementas dec.h. 1956, s. 297).

Jag vill nu bestämma den kraftsituation som reglerar partikelns rörelse. Ur $x=A\sin\omega t$, $y=B\sin(\omega t+\varphi)$ erhålles accelerationen i resp. x- och y-riktningen, $a_x=\frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\sin\omega t$ och $a_y=\frac{d^2y}{dt^2}=-B\omega^2\sin(\omega t+\varphi)$ eller

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x \text{ och } \frac{d^2y}{dt^2}=-\omega^2y \qquad (4)\ (5)$$

Om a är resultanten till a_x och a_y, gäller $a^2=a_x^2+a_y^2$, varav $a=\omega^2r$, där r är avståndet från $(x; y)$ till origo. Det följer av tecknen för a_x och a_y och av ekv. $a_y/a_x=y/x$ att a är riktad mot centrum. Partikeln m påverkas alltså av en kraft $m\omega^2r$, som är proportionell mot avståndet till centrum och riktad mot centrum (centralrörelse).

Till slut kan anmärkas, att några av de tidigare resultaten kan erhållas genom direkt studium av differentialekvationerna (4) och (5), dvs.: $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ och $\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0$. Som exempel väljer jag att visa, att partikelns hastighet i banan är störst i lillaxelns ändpunkter och minst i storaxelns. Genom att multiplicera den förra ekvationen med $2\cdot\frac{dx}{dt}$ och den senare med $2\cdot\frac{dy}{dt}$ och addera ekvationerna erhålles: $2\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+2\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2\left(2x\cdot\frac{dx}{dt}+2y\cdot\frac{dy}{dt}\right)=0$. Denna ekvation kan skrivas $\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]+\omega^2\frac{d}{dt}(x^2+y^2)=0$. Genom integration erhålles $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\omega^2(x^2+y^2)=C$ (konstant) eller $v^2+\omega^2r^2=C$ eller $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}m\omega^2r^2=$konstant, såsom förut erhölls med utgångspunkt från partikeln lägesekvationer. Givetvis kan även dessa erhållas ur (4) och (5), men denna deduktion ligger utom skolkursens ram.

Karl von Proschwitz

Bokanmälningar

HALFRID STENMARK, *Matematikundervisningen i realskolan och motsvarande skolformer.* En handledning. (Skrifter utgivna av SYL.) Gleerups förlag, Lund, 1956, 326 s., kr. 13:50, bunden kr. 17:50.

Utgivandet av denna handledning måste betecknas som en viktig tilldragelse för matematikundervisningen i realskolan och motsvarande skolformer och därmed indirekt för gymnasiet. Boken har också kommit till vid en tidpunkt, då realskolan krymper samman och sålunda den för realskoleundervisningen disponibla tiden blir ännu mera dyrbar än förut. För den oerfarne läraren är det då värdefullt att kunna taga del av de erfarenheter och rön, som lektor Stenmark (S) under en lång lärargärning gjort och tydligen noggrant registrerat och analyserat; för den mera erfarne läraren är det utan tvivel lärorikt och intressant att studera S:s metoder på olika områden av kursen, och säkerligen kommer ett sådant studium att till resultat ge en berikad undervisning.

Boken upptar till behandling alla områden av matematiken, som för närvarande ingår i den femåriga realskolans kurs. Dessutom behandlas några områden, som inte hör till kursen, t. ex. talproblem. Över huvud taget omspänner S:s bok en realskolekurs, som måste betecknas som en rätt kompakt maximikurs.

Bland det första, som S upptar till behandling är repetition av den från folkskolan inlärda terminologien: summa, term osv. Varje lärare med erfarenhet från undervisningen i matematik i realskolan känner nogsamt till att på detta område i allmänhet råder en betydande förbistring. Med utgångspunkt från den omnämnda terminologien övergår S nu till att redogöra för hur han behandlar beräkningen av en »algebraisk summa» av hela tal. Då denna redovisning är på sitt sätt signifikativ, vill jag i korthet antyda gången. Ett exempel av ifrågavarande art skrives upp på svarta tavlan, och vid samtal med eleverna får dessa föreslå metoder för beräkning av uttrycket. Ett nytt exempel leder till utmönstring av föreslagen olämplig beräkningsmetod, och så är man så småningom framme vid den i detta sammanhang lämpliga beräkningsmetoden. Nu skall räknearbetet beskrivas på svenska, och här har S tryckt på en enligt min mening synnerligen viktig del av undervisningsarbetet; eleverna skall inte bara räknemässigt lösa problemen utan också kläda hithörande tankar i ord. Efter hand sättes hela klassen i arbete med s. k. »radräkning» av uppgifter på området i fråga, som författats av någon bland »radens» elever. Denna

originella metod att i viss utsträckning låta eleverna själva författa problem praktiseras av S i betydande utsträckning och synes mig kunna stimulera elevernas intresse för matematiken. Metoden leder väl också till att rätt som det är inträffar en situation, som överraskar elevförfattarna själva och som väl därför inpräntas hos dem. I det aktuella fallet t. ex. inträffar nog snart att ett exempel leder till att summan blir negativ. — Då sedan decimalbråk och allmänna bråk och räkning därmed behandlas, skönjer man i framställningen en vällovlig strävan hos S att genom åskådliga figurer och på annat sätt söka klarlägga de räknemetoder och regler, som sedan skall användas och inläras.

Vid behandlingen av ekvationssystem med två obekanta klarlägger S först lösningen av ekvationssystemet med additionsmetoden och kommer efter en del nyttiga påpekanden fram till »receptet» för lösningen. Men S stannar inte vid detta och bara sätter eleverna till att räkna. I stället tages den ena ekvationen med sina två obekanta upp till behandling, diskussion sättes i gång, och begreppet rotpar införes. Därefter kombineras bägge ekvationerna osv. Här har sålunda S framhävt det viktiga och enligt mitt sätt att se det nödvändiga att, så gott sig på detta stadium göra låter, belysa innebörden av införda begrepp.

På somliga områden av kursen, t. ex. bolagsräkning, använder sig S av en tabellarisk uppställning. Detta kan kanske synas någon lärare mindre önskvärt, men man kan hålla med S om att en lösning, som skall helt klarlägga problemet och som därför skall innehålla ett utskrivet fullständigt resonemang, i sak ändå inte innehåller annat än den nämnda tabellen.

Behandlingen av den förberedande geometrikursen, den syntetiska geometrien, planimetrien och stereometrien rymmer många goda uppslag och många nyttiga och värdefulla påpekanden. För en lärare med liten erfarenhet är det tacknämligt att taga del av vilka satser, som S behandlar utan bevis. Rekommendationen att lösa enkla övningssatser och planimetriska tillämpningar på de genomgångna satserna och detta vid den tidpunkt, då dessa genomgås, är utan tvivel riktig; ävenledes vill recensenten för sin del instämma i vad S säger om att vid de planimetriska tillämpningarna om möjligt rita figurer i riktiga proportioner.

Ett arbete som det förevarande innehåller givetvis stoff, som läsaren kanske skulle vilja se behandlat på annat sätt eller till och med utesluta. Och samme läsare letar kanske förgäves i boken efter stoff, som han tycker är väsentligt. Recensenten för sin del tycker i varje fall, att på området sorter behandlingen av de gamla enheterna aln, fot, fot^2 osv. är överdimensionerad; att på området ekvations-

system substitutionsmetoden borde omnämnts och något behandlats såsom varande den mest naturliga lösningsmetoden; att en del vägproblem borde ha behandlats utan ekvationsmetod; att talproblemen borde ha utmönstrats såsom icke hörande till realskolan och att räkning med negativa tal borde ha framställts utförligare. Också på en del andra avsnitt av framställningen skulle recensenten hellre sett en annan behandling. Men det gäller mest icke särskilt väsentliga spörsmål, och det nu anmärkta väger lätt gent emot den vederhäftighet, som är utmärkande för framställningen i dess helhet.

Det är recensentens uppfattning att en så god och sakligt så väl motiverad framställning som den föreliggande måste komma att sätta spår i lärobokslitteraturen på området i fråga. Författaren till en av de mest använda läroböckerna i räkning för realskolan har också för sin del uttalat, att »mycket av vad S framhållit redan beaktats vid omarbetningen». Det är sålunda ett betydande initiativ SYL tagit med utgivandet av boken. Och lektor Stenmark har här gjort ett arbete, som uppenbarligen kommer att få värde och betydelse för matematikundervisningen i morgondagens skola. *Karl von Proschwitz*

W. A. Wallis and H. V. Roberts, *Statistics: A New Approach.* The Free Press, Glencoe, Illinois, 1956. Pp. 646, $ 6.00.

Ur förordet: »Statistics is a lively and a fascinating subject; but studying it is too often excruciatingly dull. In this new approach, we have tried to bring out its liveliness by lavish use of real examples from a wide variety of fields ... We have tried to bring out the fascination of statistics as a subject in its own right by emphasizing its fundamental ideas and the principles and criteria involved in applying them, and by keeping technical details from dominating the scene.»

Detta program har författarna genomfört på ett glänsande sätt. De ger verkligen liv och färg åt ett, som många anser, torrt ämne. De många exemplen illustrerar både felslut och sunda tillvägagångssätt. Ett smakprov:

»Example 141 A Pearl Harbor.

An erroneous rejection of extreme observations profoundly affected the course of history when, shortly after 7 o'clock on the morning of December 7, 1941, the officer in charge of a Hawaiian radar station ignored data solely because they seemed so incredible.»

Boken bör läsas av nybörjaren. Han kan ingenstädes få en klarare bild av vad statistik är. Han får lära sig grundbegreppen: variation, korrelation, hypotesprövning, estimation och kommer att förstå att det statistiska tänkandet är det primära och formlerna, räknandet något sekundärt.

Boken bör läsas av den erfarne statistikern eller forskaren. Han kommer att nicka igenkännande åt mycket som han lärt genom egen bitter erfarenhet, och han kommer att fråga: Varför stod inte detta i mina gamla statistikböcker?

Boken bör läsas av pedagogen. Han får en guldgruva att ösa ur, han må undervisa på skol- eller universitetsstadiet.

Boken bör läsas av oss allesammans. Trots sidantalet.

Gunnar Blom

G. W. Snedecor, *Statistical Methods.* 5th ed. The Iowa State College Press, Ames, Iowa, 1956. Pp. 534, $ 7.50.

Snedecors arbete har, sedan det först utgavs 1937, varit biologernas favoritbok framför andra, och även andra forskare har funnit det utgöra en god introduktion till statistisk metodik. Knappast någon bok behandlar t. ex. varians- och regressionanalys så på en gång lättfattligt och fullständigt, och den har verksamt bidragit till att dessa redskap fått så allmän användning inom olika forskningsområden.

Snedecor ger inga matematiska förklaringar och bygger sin framställning huvudsakligen på praktiska exempel. En och annan kallar den därför litet föraktligt för en kokbok, men enligt anmälarens mening måste statistisk metodik presenteras så för att bli förstådd och tillämpad av alla som behöver den.

I den nya upplagan har en del nytt tillkommit. Sålunda har enkla tests baserade på variationsbredden medtagits. Två kapitel är helt nya, ett om faktorexperiment och ett om sampling, det sistnämnda författat av W. G. Cochran. *Gunnar Blom*

Robert M. Thrall/Leonard Tornheim, *Vector Spaces and Matrices.* John Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1957, Pp. xii+318, $ 6.75.

Framställningssättet i denna bok utmärker sig genom pedagogisk tillgänglighet, matematisk stränghet och praktisk metodik, tre egenskaper som ingalunda står i opposition till varandra. Med exempel anknytande till läsarens tidigare kunskaper renodlar förff. de nya begrepp som skall införas. När fältet så bearbetats, vidtar en mera abstrakt, på axiom grundad behandling. Beträffande vissa områden har förff. dock valt att låta den abstraktare behandlingen komma först, exempelvis införes lineära transformationer axiomatiskt, innan matriser definieras. På detta sätt kan nybörjaren på området ur bokens sju första kapitel utan större svårighet tillägna sig algebrans grundbegrepp samt determinanter, matrisers egenvärden, bilineära former, ortogonal och unitär ekvivalens. Återstoden av boken är svårare, eftersom innehållet är mera abstrakt, omfattande t. ex. adjunk-

tion till en kropp, polynomringars struktur, elementardelare, system av lineära olikheter. Elegant formulering och naturlig anknytning till andra områden av matematiken gör även denna svårare del av boken till en stimulerande läsning. Mycket värdefulla är de rikhaltiga övningsexempel, som finns i slutet av varje paragraf. — Vid beskrivningen av metoder, som har konstruktiv natur, har förff. omsorgsfullt utformat dem så att de är lämpliga för numerisk användning, och synbarligen har därvid förff. även tänkt på att metoderna skall kunna programmeras för en matematikmaskin. Exempel härpå utgör matrisinvertering, resp. lösande av (stora) ekvationssystem, samt sista kapitlets tillämpningar på spelteori och »linear programming». — Anvisning ges på litteratur för fortsatta studier (21 böcker i algebra, 10 i lineära olikheter med tillämpningar). *Stig Comét*

J. Crank, *The Mathematics of Diffusion.* Oxford University Press, London, 1957, Pp. 347, 50s. net.

Arbetet presenterar olika matematiska metoder för problem rörande vätskediffusion. Självfallet är en stor del av dessa av allmännare intresse, och det är signifikant att författaren i bokens första del ständigt refererar till Carslaw-Jaegers *Conduction of Heat in Solids.* Några explicita omnämnanden av andra användningsområden förekommer emellertid ej, liksom överhuvud inga övningsproblem.

I bokens första del presenteras värmeledningslärans klassiska metoder, med olika typer av randvillkor samt med såväl stationära som icke-stationära lösningar. T. o. m. problemet med föränderliga randvillkor tages upp. De speciella funktioner som erfordras förutsättes kända, och den matematiska presentationen av t. ex. Laplacemetoden måste sägas vara ytterst kortfattad. Å andra sidan förekommer i hela boken rikligt med numeriska lösningar i diagramform.

Bokens andra del är väsentligen ägnad åt sådana utvidgningar av problemet att de exakta matematiska metoderna inte längre är allmänt giltiga. Speciella och numeriska metoder introduceras här. Metoder att definiera och uppmäta diffusionskoefficienterna diskuteras. Boken avslutas med tabellsamling och sakregister. — Referenserna äro företrädesvis lättåtkomliga böcker och tidskrifter. *Eskil Block*

Louis Brand, *Vector Analysis.* John Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1957, Pp. xiv+282, $ 6.00.

Detta är en elementär framställning av vektorer i den utsträckning dessa används i fysiken. Boken utgör närmast en förkortad och förenklad upplaga av förf:s *Vector and Tensor Analysis* (se Elementa årg. 30). Den är i stort sett upplagd efter traditionella linjer (Gibbs). Efter en utförlig presentation av vektoralgebran studeras linjebundna vektorer. Därefter behandlas den egentliga vektoranalysen.

De fysikaliska tillämpningarna uppta inte mindre än tre kapitel. Bl. a. studeras hydrodynamik samt Maxwells ekvationer. Medan resten av boken ägnats åt vektorer i det tredimensionella rummet, undersöks i slutkapitet abstrakta vektorrum över en godtycklig kropp, något som är ovanligt i framställningar av det här slaget. Så omnämns t. ex. Hilbert-rum.

Till anakronismerna får väl räknas dyadbegreppet, som används för att motivera införandet av divergens och rotation! Det kan tilläggas att dyadalgebran är ekvivalent med algebran av alla kvadratiska matriser.

Bokens värde höjes avsevärt av ett hundratal övningar med svar. Dessutom finns ett stort antal genomräknade exempel. *Jaak Peetre*

J. Favard, *Cours de géométrie différentielle locale.* Cahiers scientifiques, fascicule XXIV. Gauthier-Villars, Paris, 1957, 553 p., 6000 fr.

Bokens 124 första sidor ägnas åt en mycket grundlig »Introduction». Författaren gör sig möda att ordentligt redogöra för de topologiska och gruppteoretiska begrepp som används. En stor nackdel är emellertid, att inledningen härigenom får en mycket abstrakt prägel och blir rätt svårläst — åtminstone för läsare utan mycket goda förkunskaper i ämnet. I introduktionen behandlas utom sedvanlig tensoralgebra bl. a. teorin för Lieska transformationsgrupper samt grunderna av den moderna yttre differentialkalkylen.

Med måttfullt utnyttjande av den abstrakta apparaten ger författaren sedan en tämligen enhetlig och tilltalande genomgång av det klassiska differentialgeometriska stoffet. Framställningen rör sig naturligtvis ofta i ett n-dimensionellt rum, men kurvor och ytor i det vanliga tredimensionella rummet ägnas speciellt intresse. Inte bara det euklidiska rummets differentialgeometri behandlas, utan även affina resp. projektiva rums. Sista avsnittet handlar om teorin för parallelltransport och konnexioner i godtyckliga riemannska och även icke-riemannska rum. *Folke Eriksson*

R. K. Livesley, *An Introduction to Automatic Digital Computers.* Cambridge University Press 1957, Pp. 53+viii, 8s. 6d. net.

Ovanstående lilla bok är verkligen, som titeln anger, en inledning i ämnet. Den vänder sig till ingenjörer m. fl. som i sitt arbete använda numeriska metoder. Syftet är att upplysa dessa personer om att det finns något som heter matematikmaskiner och att skissera hur de användas. Boken är för kortfattad för att kunna lära ut t. ex. kodning i detalj. Stoffet till boken är hämtat från en föreläsningsserie hållen år 1954 i Manchester. Det märks faktiskt något vid läsningen, att ej alla fakta äro helt aktuella. Utvecklingen går ju som bekant framåt mycket snabbt på detta område. *Hans Riesel*

Paul Montel, *Leçons sur les récurrences et leurs applications.* Collection Borel, Gauthier-Villars, Paris, 1957, x+268 p., 4300 fr.

Föreliggande bok, skriven av den kände funktionsteoretikern Paul Montel, är en monografi över teorin för rekurrenta sviter (»récurrences») och är delvis baserad på Montels egna undersökningar. I de fem första kapitlen utvecklas den allmänna teorin. Därefter studeras kedjebråk, som ju kunna återföras på rekurrenta sviter. De båda sista kapitlen behandlar iteration av holomorfa funktioner.

Boken är mycket lättläst och den ger läsaren en god inblick i ifrågavarande område. Ett minimum av kunskaper i funktionsteori torde vara tillräckligt för att kunna tillgodogöra sig innehållet. En litteraturförteckning i slutet av boken i stället för knappa litteraturanvisningar i fotnoterna skulle kanske ha ökat monografins användbarhet.

Jaak Peetre

H. N. V. Temperley, *Changes of State.* (A Mathematical-Physical Assessment.) Cleaver-Hume Press Ltd, London 1956, Pp. xii+324, 50s. net.

Boken utgör en teoretisk behandling av tillståndsändringar hos den kondenserade materien. De behandlade problemen framgår av följande kapitelrubriker: Förångning och kondensering, smältning och stelning, lösningar, ordningsomvandlingar hos legeringar, adsorption och därmed besläktade problem, ferro- och antiferromagnetism, ferroelektricitet och λ-punktsanomalier hos fasta kroppar, supraledning, omvandlingen hos flytande helium. I bokens mycket omfattande textmaterial redogöres ingående för vad som karakteriserar olika förefintliga teorier inom de behandlade områdena, oftast i belysning av experimentella fakta. Gemensamma drag hos många skenbart helt olika typer av omvandlingar påpekas och diskuteras.

De matematiska härledningar som ges i boken är i många fall rätt knapphändiga. Till varje kapitel är emellertid fogat ett antal representativa referenser till arbeten där läsaren kan erhålla mera fullständiga härledningar. Inte minst genom den kritiska analys som författaren ger av olika teorier inom det fasta tillståndets fysik utgör boken ett värdefullt tillskott till litteraturen på området. *J. O. Linde*

F. J. M. Farley, *Elements of Pulse Circuits.* Methuen's Monographs on Physical Subjects. London 1956, Pp. viii+143, 8s. 6d. net.

Föreliggande bok vänder sig enligt författarens förord i första hand till fysiker och forskningspersonal som önskar en introduktion till pulstekniken. Att skriva en bok med starkt begränsat omfång och i denna ge en översikt av god kvalitet över ett kunskapsområde är en

uppgift som författare ofta misslyckas med. Dr Farley tillhör enligt anmälarens uppfattning dem som har lyckats förträffligt.

I de två första kapitlen presenteras för läsaren terminologi och några pulstekniska begrepp. Vidare får han en repetition och sammanställning av vad han förutsättes känna till för att kunna studera bokens huvudinnehåll. Dessa inledande kapitel har givits rubrikerna »Basic Concepts» och »Fundamental Valve Circuits».

Författaren har delat upp behandlingen av de grundläggande pulskretsarna på fyra kapitel, nämligen: generatorer för fyrkantsignaler, startkretsar, tidaxelgeneratorer och pulsförstärkare. Bokens huvuddisposition ansluter sig sålunda till kretsarnas användning för olika ändamål i stället för den i litteraturen vanligare metoden att låta kapitelrubrikerna bestämmas av kretsarnas principiella struktur. Författarens val härvidlag har säkerligen bidragit till att boken ger en redig och klar översikt över pulsteknikens viktigare element. Dock saknar anmälaren ett kapitel om pulsfördröjande kretsar.

I bokens avslutande kapitel redovisar författaren ett urval tillämpningar. Pulsteknikens direkta användning inom den fysikaliska forskningen har här endast fått en mycket sparsam belysning. Detta är med hänsyn till förordet ägnat att förvåna något.

Framställningen är i huvudsak icke-matematisk, men matematiken som arbetande redskap och som stenografiskt uttryckssätt har icke helt portförbjudits. Derivata- och integralbegreppet samt RC-kretsens differentialekvation förutsättes vara kända saker.

På de 138 textsidor, som boken omfattar, redogör författaren för ett icke föraktligt antal pulskretsar. Framställningen är mycket klar. Läsaren behöver inte tveka om de genomförda resonemangens fysikaliska innebörd. Boken kan därför rekommenderas till alla som önskar göra en första bekantskap med pulsteknikens grunder.

Folke Hedström

M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum.* John Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1957, Pp. x+248, $ 10.00.

Författaren till föreliggande arbete har gjort sig känd genom en mångsidig insats inom den teoretiska atom- och kärnfysiken. Han är sedan ett tiotal år chefsfysiker vid Oak Ridge National Laboratory. Boken är baserad på föreläsningar, som han hållit där under 1955. Den avser att ge en elementär och applikatorisk men samtidigt utförlig introduktion till den viktiga del av teorien för kärnors och atomers struktur, som teorien för impulsmoment utgör. Boken ingår i Wiley's »Structure of Matter Series» liksom författarens tidigare arbete »Multipole Fields».

Efter ett inledande kapitel, innehållande en kortfattad översikt av

kvantmekanikens grundprinciper, ägnas den formella teorien en tämligen uttömmande behandling i fem kapitel. Huvudlinjerna är därvid följande. Impulsmomentoperatorn **J** definieras i anslutning till den exponentiella framställningen av den tredimensionella rotationsoperatorn. Härur erhålles de välkända kommuteringsrelationerna samt matrixframställningen av $\mathbf{J}^2$ och de sfäriska komponenterna J_z (diagonal), J_+, J_-. Clebsch-Gordan-koefficienterna definieras på övligt sätt som den unitära transformationen $(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m)$ mellan den »kopplade» och den »okopplade» representationen vid addition av två impulsmoment (vektorkoppling). De grundläggande egenskaperna hos koefficienterna diskuteras. Den $(2j+1)$-dimensionella representationen av rotationsgruppen jämte de viktigaste egenskaperna hos rotationsmatrisens element redovisas. Clebsch-Gordan-serien presenteras och används bl. a. för härledning av klotfunktionernas additionsteorem. Irreducibel tensoroperator definieras gruppteoretiskt, och dess egenskaper belyses. Wigner-Eckarts faktoriseringsteorem härleds, och dess betydelse för spin-urvalsregler anges. Racah-koefficienterna definieras i samband med koppling av tre impulsmoment. Inom samtliga behandlade områden belyses den fysikaliska innebörden av de införda begreppen. De oundvikliga fasfrågorna diskuteras. I tre appendices till boken ges ytterligare detaljer om Clebsch-Gordan- och Racah-koefficienterna samt om rotationsmatriserna och klotfunktionerna.

I de sex återstående kapitlen återfinns tillämpningar av teorien på en mängd områden: Elektromagnetisk strålning; multipolteori; statiska elektriska och magnetiska moment och deras växelverkningar; partiklar med spin $^1/_2$ i relativistisk och icke-relativistisk representation (spin-1-fältet behandlas redan i bokens förra del); orienterade kärnor och polarisation; vinkelkorrelationer; vinkelfördelningar vid kärnreaktioner; *LS*- och *jj*-representationerna och transformation mellan dem; identiska partiklar, Pauli-principen och elementär FPC-teknik (FPC = »fractional parentage coefficient»).

Större delen av det behandlade materialet har hittills varit fördelat på en mängd källor, främst Wigners och Weyls arbeten om kvantmekanik och gruppteori, Condon och Shortley's standardverk över teorien för atomspektra samt Racahs artiklar om komplexa spektra. Tidigare smärre monografier om impulsmoment i kvantmekaniken (t. ex. Feenberg och Pake samt Edmonds' CERN-kompendium) har varit ofullständiga.

Den nya boken torde genom sin stoffrikedom fylla ett stort behov. Den vänder sig också till en bred läsekrets genom att endast göra bruk av elementära matematiska och kvantmekaniska metoder. Sålunda förekommer ej explicit användning av gruppteori och tensoralgebra. Av naturliga skäl har detta syftemål med boken ej kunnat

förenas med krav på stränghet och elegans. Att framställningen därjämte delvis blivit tungrodd och onödigt svårbegriplig, må tillskrivas vissa brister i fråga om formulering och disposition. Sistnämnda präglas ofta av »snedbelastning» och logisk oklarhet, som gör det svårt att skönja de stora linjerna och se var de olika resonemangen börjar och slutar. En orsak till det negativa intrycket torde ligga i den av författaren deklarerade strävan efter enkelhet genom att föra induktiva resonemang. Samtidigt har å andra sidan ett deduktivt framställningssätt på många punkter inte kunnat undvikas. Denna svåra kompromis har inte helt lyckats, och resultatet synes därför mångenstädes ha blivit en frånvaro av båda framställningssättens fördelar. Med rationellare disposition och bättre genomtänkt formuleringsteknik skulle utrymme kunna sparas och användas exempelvis till ett önskvärt kapitel om partikelväxelverkningar. — Antalet tryckfel, bland dem somliga grova, är onödigt stort.

Dessa kritiska synpunkter får emellertid inte dölja bokens stora nyttighet. Den bör kunna utgöra en rik kunskapskälla för en stor krets av fysikaliskt initierade personer, teoretiker såväl som experimentalister. Den har blivit den första i den trio av böcker om impulsmoment, som nu befinner sig under utgivning. Den torde på ett utmärkt sätt komma att komplettera Edmonds' och Racahs väntade arbeten. *Sven Wahlborn*

Eugene M. Grabbe (Editor), *Automation in Business and Industry.* Wiley, New York/Chapman & Hall, London, 1957, Pp. xix+611, $ 10.00.

En utvald samling teknici och vetenskapare, alla aktivt verksamma inom automationens utveckling i USA, gav våren 1955 vid University of California en fortbildningskurs för ingenjörer, industriledare och ekonomer. Denna kurs ligger till grund för här anmälda verk.

Boken behandlar automationen mycket mångsidigt, för att inte säga allsidigt. Varje författare har haft mycket stor frihet vid utformningen av sitt kapitel. Dess bättre har detta inte lett till besvärande och onödiga upprepningar. Fackredaktören Mr Grabbe har skött sitt arbete förträffligt. Resultatet har blivit en bok med charm, en bok som enligt anmälarens uppfattning är värd att läsas av många. Sociala och ekonomiska aspekter ventileras vid sidan av de tekniska. Varje kapitel utgör en behaglig kunskapskälla för sitt delområde av automation.

I förordet ger fackredaktören en programförklaring med orden: »... to show how the fields of feedback control theory, instrumentation, analog and digital computation and data processing are now becoming integrated as automation is applied on a broad scale to control systems that encompass the range from top management to individual machines ...».

Verkets tre första kapitel utgör en allmänt orienterande inledning, medan de följande sju har utpräglat teknisk karaktär. Här behandlas de kunskapsområden som utgör automationens tekniska grund. Servoteknik, industriell instrumentering och kontroll, analogimaskiner, siffermaskiner, databehandling, analogi-digitalomvandlare samt ingångs- och utgångsanordningar får en trevlig framställning av goda tekniska skribenter. Trots att framställningen är kortfattad, ger författarna en klar bild av respektive områdens principiella drag. Det är svårt att ge någon av författarna till dessa grundläggande tekniska kapitel en eloge framför de andra. Skulle det i så fall vara till professor Ware för kapitlet om siffermaskiner? Att skriva om siffermaskiner brukar, vad den mesta litteraturen i ämnet visar, vara en mycket svår sak. Det synes anmälaren, att professor Ware har lyckats undvika det för siffermaskinslitteraturen ofta så typiska förstakontakttråkiga intrycket och detta utan att förfalla till ytligt trams.

I kap. 11 t. o. m. 16 avhandlas automationens tillämpningar såsom användning av elektroniska databehandlingsmaskiner, automatisk styrning av flygplan, automatisk produktion av elektroniska apparater, automation inom den kemiska industrien, analogimaskinens användning för industriell kontroll samt styrning av verktygsmaskiner med hjälp av siffermaskiner.

Kapitel 17 avhandlar allmänna synpunkter på produktionens automation, medan de två sista kapitlen behandlar automationens ekonomi och synpunkter på automationens framtid.

I dessa dagar, då automationen låter tala om sig så mycket, utgör det härmed anmälda verket en bok som man önskar ha stående på en lättillgänglig plats i en lättillgänglig bokhylla. Det är en lärobok och ett uppslagsverk. Man trivs med boken, dess goda illustrationer och dess författare. *Folke Hedström*

Strålningskemi, Föredrag vid konferens i Stockholm 8. 5. 1956. IVA, FKO-medd. nr 24, Stockholm 1957, 63 s., kr. 8: —.

IVA har i detta häfte utgivit översiktsföredrag av fem experter på olika områden beträffande den joniserande strålningens kemiska verkningar.

Tekn. lic. G. Aniansson, Tekn. Högskolan i Stockholm, behandlar strålningskemiens fysikalisk-kemiska grunder, såsom absorptionsprocesser och molekylexcitationen. Docent P. O. Kinell, Uppsala, ger en detaljrik översikt av den joniserande strålningens användning inom högpolymerkemin för t. ex. polymerisationsinitiering eller för tvärlänkning av redan bildad polymer; artikeln ger också en värdefull litteratursammanställning med över 200 referenser. — R. S. Hannan, Univ. of Cambridge, England, diskuterar olika aspekter på frågan

om sterilisering av medicinska artiklar, livsmedel o. d. med strålning; olika strålkällors ekonomiska möjligheter beröres liksom svårigheterna med t. ex. lukt- och färgförändringar av bestrålade livsmedel. — Docent R. Kiessling, AB Atomenergi, ger en intressant inblick i de säregna metallgittereffekter som uppträder i bestrålat reaktormaterial, såsom längdförändringar på uranstavar på ända till 100 %. — Häftet avslutas med en artikel av fil. lic. L. Carlbom, AB Atomenergi, om strålskyddsfrågor och deras teoretiska, praktiska och administrativa handläggande. Intressant och lugnande är uppgiften, att bland AEC:s, U. S. A., 80 000 anställda endast inträffat 19 strålskador tack vare att skyddsproblemen redan från början ägnats stor uppmärksamhet. Strålriskerna har i detta fall i själva verket kunnat hållas under effektivare kontroll än de flesta andra yrkesrisker.

Artiklarna i häftet utgör en god introduktion i strålningskemins problem och potentiella möjligheter och bör med behållning kunna läsas av varje naturvetare och tekniker. *Kurt Lidén*

John Arrend Timm, *General Chemistry.* 3rd Ed. McGraw-Hill Book Co., New York/Toronto/London, 1956, Pp. 636, $ 6.00.

Till det yttre är denna amerikanska lärobok ganska omfångsrik, men det sakliga innehållet synes motsvara en något utvidgad kurs för det svenska realgymnasiet. Det relativt stora omfånget beror på att framställningen är mycket utförlig. I vissa fall måste en svensk läsare nog tycka, att författaren rentav förfaller till pratighet, som t. ex. när han skriver »Multiple bonds represent valences that are not doing their full duty». Men på hans ärliga pedagogiska strävan kan man inte ta fel.

Boken är indelad i 46 kapitel, av vilka ungefär hälften ägnas åt allmän (fysikalisk) kemi, tre åt organisk kemi och biokemi, två åt kärnkemi och resten åt oorganisk kemi. Kapitlen avslutas dels med övningsuppgifter, dvs. huvudsakligen repetitionsfrågor på det behandlade stoffet, dels med litteraturhänvisningar, främst till uppsatser i J. Chem. Education.

Läran om atomernas och molekylernas byggnad införes på ett mycket tidigt stadium liksom periodiska systemet. Av grupperna i det senare behandlas först halogenerna och alkalimetallerna, och därefter rör sig diskussionen om grundämnena och deras egenskaper alltmer mot systemets centrum.

Framställningen livas av många trevliga historiska notiser, av en hel del nytt kunskapsstoff och av goda illustrationer. Vissa partier, t. ex. om olika bindningstyper, om resonans, om osmotiskt tryck etc. är mycket välskrivna, medan andra t. ex. om oxidationstal och bestämningen av koefficienterna i svårare reaktionsformler förefaller

nindre lyckade. En del räkneuppgifter genomgås men på ett ytterligt lementärt sätt. Mycket enkla övningsuppgifter av samma slag avslutar ckså vissa kapitel, men facit till dem saknas i allmänhet. På sina åll störes man därav, att författaren tydligen ängsligt undviker att matematiskt hänseende begära för mycket av läsaren och därför junker ner i rena pjoskpedagogiken.

Kapitlen organisk kemi och biokemi måste betecknas som magra. Begreppet isomeri behandlas t. ex. synnerligen summariskt liksom ckså bensolmolekylens byggnad. Men författaren försvarar sig med tt i den elementära kurs, för vilken läroboken är avsedd, endast inga tid kan ägnas åt organisk kemi.

Trots den lite tröttsamt hurtfriska och yviga framställningen förvarar boken dock väl sin plats i ett svenskt skolbibliotek.

Birger Adell

E. Calvet/H. Prat, *Microcalorimétrie, Applications physico-chimiques et biologiques.* Masson et Cie, Paris 1956, 396 p.

I detta atomsprängningarnas tidevarv — när produktion av enorma nergikvantiteter har en särskild aktualitet och den populära energinheten synes vara megaton (underförstått: exploderande trotyl) — är let av ett alldeles speciellt intresse att klargöra de små energimängdernas stora betydelse för snart sagt alla naturvetenskapliga, tekniska ch medicinska forskningsområden. Den här recenserade boken behandlar de intrikata mikrokalorimetriska metoder, som huvudsakligast utvecklats i Marseille (senare också i Montreal), och redogör ör de resultat, som uppnåtts med dessa metoder.

Så gott som alla biologiska, fysikaliska och kemiska skeenden åtföljes av en energiförändring, som på ena eller andra sättet kan mätas kvantitativt. Många processer ger upphov till mycket små värmeoningar och andra — långsamma — processer åtföljs av en liten nergiförändring per tidsenhet. I båda dessa fall kan det bli nödvändigt att uppmäta temperaturförändringar av storleksordningen 10^{-5} till 10^{-6}° C. För att få en uppfattning om den känslighet det här ar fråga om behöver man bara tänka på att avdunstning av ca 2 nilliondels gram från en liter vatten medför en temperaturändring på hela vattenmassan av 10^{-6}° C.

Principiellt utvecklades den mikrokalorimetriska apparaturen av A. Tian i början på 1920-talet. Genom att använda en kombination av Peltier- och Joule-effekterna kunde Tian åstadkomma praktiskt taget adiabatiska förhållanden, dvs. mätkärlets temperatur kunde bringas att bli densamma som det omgivande termostatkärlets. Härigenom minskades givetvis genom konvektion, strålning och ledning okontrollerbara värmeflöden. Genom att bygga två identiska kalorimetrar

symmetriskt inneslutna inom samma »omgivning» kunde Calvet driva såväl känslighet som noggrannhet avsevärt längre. Det är i dag möjligt att mäta så små energimängder att 10^{-7} kalori svarar mot 2 mm utslag och att kompensera för värmeförluster utåt under praktiskt taget obegränsad tid.

Calvet och Prats bok är indelad i tre delar; den första behandlar apparaturen såväl teoretiskt som praktiskt, den andra fysikaliskkemiska tillämpningar och den tredje biologiska användningsområden. Som exempel på tillämpningar inom fysik och kemi kan nämnas mätning av lösnings-, blandnings- och adsorptionsvärmen, reaktionsvärmen i fasta system som cement, gelatineringsvärmen för högpolymera ämnen. Genom att studera adsorptionen kinetiskt kan ytstorlek och ytegenskaper hos porösa eller finpulveriserade ämnen bestämmas — av intresse är att nämna att Marseillegruppen mer och mer inriktar sig på studiet av den heterogena katalysens fenomen — Calvet bygger f. n. ett 4-våningars laboratorium som till största delen skall utnyttjas för detta ändamål. Bland biologiska tillämpningar kan nämnas studiet av groningsprocesser, mikroorganismer och insekternas förvandling.

Den här recenserade boken är att betrakta som en utförlig handbok inom sitt område och vänder sig till en ganska begränsad läsekrets. Speciellt vad det instrumentella beträffar är den av intresse och betydelse huvudsakligast för den som — efter mycken tvekan — bestämt sig för att bygga en mikrokalorimeter. Man skulle önska att författarna kompletterade denna monografi med att skriva en mer lättläst framställning, som kunde ge en större läsekrets möjlighet att bilda sig en uppfattning om de mikrokalorimetriska metodernas betydelse inom modern naturvetenskap. *S. Sunner*

Edward Appleton, *Science and the Nation.* The B. B. C. Reith Lectures for 1956. Edinburgh University Press 1957, Pp. xi+104, 10s. 6d. net.

Föreliggande lilla bok återger sex föredrag som Sir Edward Appleton höll 1956 i engelska radions program »Home Service». Föredragen, som uppges ha varit avsedda främst för föräldrar och lärare, äro betitlade: Our National Need of Science; Science in War; Science for its Own Sake; Government Science; Industrial Science; Science and Education.

De framförda synpunkterna äro inte nya för den som följt den engelska kulturdebatten under senare år, men man får här ett koncentrat av brittisk klokskap meddelat i allmänfattlig form av en av de främsta organisatörerna av Englands pågående enorma kraftutveckling inom forskning och teknik. *Torsten Jönsson*

Arthur Holly Compton, *Atomic Quest: A Personal Narrative.* Oxford University Press, London/New York/Toronto, 1956, Pp. xix+370, 30s. net.

Mycket har skrivits om andra världskrigets amerikanska atombombprojekt, om hur atombomben kom till, varför den kom till och varför den kom till användning. Men ännu torde mycket fattas i bilden.

Flera av de främsta aktörerna i dramat finns nu inte mer. Arthur H. Compton, nu själv en gammal man, har känt sig pressad att framlägga *sin* version.

Compton hör till de få vetenskapsmän som förutom att spela en ledande roll vid atombombens framställning även hade tillträde till de politiska rådslagen. Hans bok är inte bara en utförlig berättelse om händelser och människor och människors reaktioner utan också en gripande bekännelse.

Denna bok av en framstående och framsynt fysiker, tillika aktiv kristen, är av den sort som en recensent inte kommenterar utan bara enträget ber folk läsa. *Torsten Jönsson*

D. R. Bates (Editor), *Space Research and Exploration.* Eyre & Spottiswoode, London, 1957. Pp. 224, 25s. net.

Arthur C. Clarke, *The Making of a Moon.* Frederick Muller Ltd, London, 1957. Pp. 182, 21s. net.

Två dagar före öppnandet den 1 augusti 1955 av sjätte internationella astronautiska kongressen i Köpenhamn lät president Eisenhower kungöra, att projekt Vanguard, innebärande konstruktion av artificiella jordsatelliter avsedda för forskningsändamål under internationella geofysiska året 1957/58, hade godkänts av Förenta staternas regering (jfr Elementa *39*, 214, 1956). Under kongressen, som var den första internationella astronautiska kongress som ryssarna sänt delegater till, meddelade professor Sedov, ordförande i ryska vetenskapsakademiens astronautiska kommission, att ett satellitprojekt var under arbete även i Sovjetunionen.

Två dagar före öppnandet den 6 oktober 1957 av åttonde internationella astronautiska kongressen i Barcelona kungjordes, att en rysk måne kretsade kring jorden; satellitprojektet Iskustvennyi Sputnik Zemli hade realiserats.

Den amerikanska deklarationen 1955 tog pressen på sängen, det ryska meddelandet den 4 oktober 1957 likaså.

I Ryssland föddes den 17 september 1857 raketteknikens fader, Konstantin E. Ziolkovsky. Ännu 100 år senare trodde man utanför expertkretsarna inte på den ryska raketteknikens, knappast på raketteknik av annan nationalitet heller (utom för militärt bruk); idéer om

rymdfart betraktades som science fiction. — Förvirringen i presskommentarerna efter den 4 oktober gör uppenbart, att vederhäftig upplysning är av nöden. Man vill därför hoppas, att Svenska Interplanetariska Sällskapet snarast skall få möjlighet att realisera sitt på grund av otillräckliga ekonomiska resurser sedan länge vilande tidskriftsprojekt.

I den första av ovannämnda böcker ge tolv prominenta högaltitud- och rymdforskare under redaktion av D. R. Bates, professor i tillämpad matematik vid universitetet i Belfast och känd atomfysiker, en för »the general reader» avpassad bred översikt av rymdforskningens problemställningar. Denna bok rekommenderas varmt åt var och en som vill ha vederhäftig upplysning om rymdforskningens syften.

Om projekt Vanguard finns en vidlyftig litteratur: böcker, tidskriftsartiklar, rapporter. Sedan amerikanerna »förlorade kapplöpningen om den första jordsatelliten», har det många gånger sagts, att amerikanerna pratar medan ryssarna arbetar. Man får dock komma i håg, att Vanguard är ett forskningsprojekt; och om forskning hör det till god ton att vara meddelsam. För övrigt krävs mycket prat för att man skall få pengar till forskning; uppenbarligen ha astronautikerna pratat för litet.

Engelsmannen Clarkes bok kom på bokhandelsdisken några dagar före den 4 oktober. Den beskriver utförligt Vanguards förhistoria (bokens intressantaste del) och utvecklingsarbetet dittills. Clarke hör till veteranerna inom den astronautiska rörelsen; de ledande männen i arbetet på Vanguard äro hans personliga vänner. Hans skildring är därför synnerligen initierad. — Till Vanguards förhistoria hör forskningsraketen Viking. Om arbetet med denna finns en intressant bok av utvecklingsledaren, Milton W. Rosen (*The Viking Rocket Story*, Faber and Faber, London, 1956, 21s. net.). Rosen, »amerikanen som vet mest» om stora raketer, är »technical director» för projekt Vanguard.

Torsten Jönsson

W. Birkenstock/Fr. Schulte, *Die Elektronentheorie im Unterricht der Oberstufe.* Praxis-Schriftenreihe, Chemie 1, 4. Aufl., Aulis Verlag, Frankenberg, 1957, 62 S., DM 2.40.

Denna skrift är ett särtryck av en uppsats i tidskriften Praxis (1952) och har till syfte att visa kemilärare, hur långt elektronteorien för den kemiska bindningen kan föras på skolstadiet. Framställningen är pedagogiskt klar och systematisk. Bl. a. behandlas komplexkemi, Waldens omvandling, substitution i bensolkärnan och induktiva effekter. Tillämpningarna på syra-bas-teori äro minst lyckade. Anledningen till att fria protoner inte finnas i en lösning är väl inte, att de para sig till molekylärt väte!

Så mycket »elektronteori» som här kan man enligt min mening inte ta med i skolkemien, men som orientering för läraren är uppsatsen användbar. *Bertil Englund*

Kemistyrket — Framtidsyrket. En yrkesorientering för gymnasister, utgiven av Svenska Kemistsamfundet 1957.

I denna vackert illustrerade broschyr lämnas en mycket trevlig redogörelse för de uppgifter som möta arbetarna i »kemistyrkena»: forskaren, driftsingenjören, patentingenjören, läraren, tjänstemannen vid Statens provningsanstalt osv. Upplysningar om studietid, intagningsbestämmelser vid högskolor, löner och framtidsutsikter avslutar häftet, som kemilärare erhålla gratis vid rekvisition från Svenska Kemistsamfundet, Fack 30017, Stockholm 30. *Bertil Englund*

Mathematical Tables. Vol. 1. The Use and Construction of Mathematical Tables. By L. Fox. National Physical Laboratory. H. M. Stationery Office, London, 1956. Pp. 60, 17s. 6d. net.

Detta häfte inleder en serie som kommer att omfatta tabeller, vilka kan väntas få praktisk användning men är alltför speciella för att ingå i Royal Society Mathematical Tables Series.

Häftet innehåller mer än sidantalet låter förmoda. Åtskilligt sägs om konstruktion av tabeller, men värdefullast är den på en gång pregnanta och uttömmande framställningen av gängse interpolationsformler, såsom Newtons, Everetts, Bessels, Lagranges och modifikationerna av dessa. En värdefull diskussion föres rörande maximifelen hos dessa formler.

Fox' lilla arbete kan läsas med god behållning av envar numeriskt intresserad, vare sig han är sysselsatt på konstruktions- eller konsumentsidan. *Gunnar Blom*

Erik Storm, *Plastisk bearbetning.* Sv. Bokförl./Bonniers, Stockholm 1957, 202 s., kr. 14:75.

Läroböcker i tekniska ämnen för de tekniska läroverken är alltjämt ett bristområde. Det är därför glädjande, att den tekniska läroboksfloran fått ett sådant tillskott som Storms »Plastisk bearbetning».

Bokens inledning behandlar begreppen plastisk formändring och formändringsarbete. I fortsättningen behandlas de olika plastiska bearbetningsmetoderna var för sig, och en värdefull avslutning är ett sakregister.

På det stadium, som boken är avsedd för, krävs enligt anmälarens mening i första hand en ganska grundlig behandling av bearbetningsmetodernas teoretiska underlag. Författaren har också på ett förtjänstfullt sätt begränsat maskinbeskrivningarna till förmån för teorien

Forts. sid. 296.

Problemavdelning[1]

Matematiska uppgifter

2128) *P är en punkt på den kring den liksidiga triangeln ABC omskrivna cirkeln. Räta linjerna PA, PB, PC skära BC, CA, AB i punkterna A_1, B_1, C_1 resp. Visa, att* $PA \cdot PB \cdot PC = PA_1 \cdot PB_1 \cdot PC_1$.

Sats av J. Steiner

2129) *En cirkel med centrum C och radien R samt en punkt $O \neq C$ ej belägen på cirkeln äro givna. En rörlig linje genom O skär cirkeln i A och B. På linjen avsättes* $\overrightarrow{ON} = m \cdot \overrightarrow{OA} + n \cdot \overrightarrow{OB}$ *(m och n konstanter, $m \neq n$). Sök enveloppen för normalen i N mot linjen.* *X.*

2130) *I parallelltrapetset ABCD äro BC och AD parallella. P är en punkt utanför AB. Linjerna CQ och DQ äro parallella med AP resp. BP. Visa, att P ligger lika långt från CD som Q från AB, då bägge avstånden mätas i trapetsbasernas riktning.* *V. Thébault*

Enklare matematiska uppgifter[2]

2131) Ett tal börjar med n ettor, därefter kommer $n+1$ tvåor och sist en femma. Visa, att talet är en jämn kvadrat.

2132) Kateterna i en rätvinklig triangel äro 1 cm och 2 cm. En cirkel går genom den räta vinkelns spets och delar hypotenusan i tre lika delar. Ange cirkelns radie.

Svar: $\sqrt{170} : 18 = 0{,}724$ cm.

2133) Ange u som funktion av z, när $u = \sin^2(x+y) + \sin^2(x-y)$ och $z = \cos 2x \cos 2y$.

Svar: $u = 1 - z$.

2134) Lös ekv. $(1-\cos 6x)(1-\cos x) : (1-\cos 2x)(1-\cos 3x) = 0{,}25$.

Svar: $\pm 41{,}41° + n \cdot 360°$; $\pm 75{,}52° + n \cdot 360°$.

2135) I en regelbunden tresidig pyramid äro baskanterna 1 cm och höjden h cm. En punkt P på höjden förenas med tetraederns hörn.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Banérgat. 33, Stockholm Ö.

[2] Uppg. 2131—2132 äro insända av *S.B.*, 2133—2134 av *X*, 2135—2140 av *I. Gunsjö*, 2141—2142 av *Ph.*

Ange summan ($=y$ cm) av P:s avstånd till hörnen som funktion av P:s avstånd ($=x$ cm) till basytan och studera funktionen.

Svar: $y=h-x+\sqrt{9x^2+3}$. Om $0<h\leqq\frac{1}{12}\sqrt{6}$, avtar y från $h+\sqrt{3}$, då $x=0$, till $\sqrt{3+9h^2}$, då $x=h$. Om $h>\frac{1}{12}\sqrt{6}$, avtar y från $h+\sqrt{3}$ till ett minimum $h+\frac{2}{3}\sqrt{6}$ för $x=\frac{1}{12}\sqrt{6}$ för att sedan växa till $\sqrt{3+9h^2}$.

2136) Bestäm konstanterna a, b, c så, att kurvan $y=x^4+ax^3+bx^2+c$ får en terrasspunkt i (1; 0).

Svar: $a=-\frac{8}{3}$, $b=2$, $c=-\frac{1}{3}$.

2137) Om $x=z-\cos z$ och $y=z+\cos z$, är $4(y'')^2=y'(1+y')^4$.

2138) Kurvan $y=(x-1)(x-a)$ skär axlarna i A, B och C. Tangenterna till kurvan i dessa punkter bilda en triangel. Sök orten för dess tyngdpunkt, när a varierar.

Svar: $y=-3(x-\frac{2}{3})^2$.

2139) Två av konjugatdiametrarna till en ellips, vars axlar äro parallella med koordinataxlarna, falla utefter linjerna $8x-y-10=0$ och $x+2y+3=0$. Ena brännpunkten ligger på linjen $x-y=0$. Ange ellipsens ekvation.

Svar: $4(x-1)^2+(y+2)^2=12$.

2140) Genom två fasta punkter dras linjer parallella med var sin av två konjugatdiametrar i en given ellips. Orten för dessa linjers skärningspunkt är en annan ellips. Visa, att dess excentricitet är lika stor som den givna ellipsens.

2141) I en parabel drages en korda genom brännpunkten F. Diametern genom kordans mittpunkt M skär parabeln i punkten P. Visa, att triangeln PFM är likbent.

2142) I ett paralleltrapets ligga de icke parallella sidorna s_1 och s_2 på linjerna l_1 resp. l_2. Om cirkeln med diametern s_1 tangerar l_2, så tangerar cirkeln med diametern s_2 linjen l_1.

Lösn. till uppg. 2099—2101

2099) *En cirkel och en punkt P på dess tangent i A äro givna. Genom P drages en linje l, som skär cirkeln i B och C. Sök orten för skärningspunkten mellan l och en inre eller yttre bisektris till vinkeln BAC.* *X.*

Den inre bisektrisen skär BC i D, den yttre i D_1. Då vinkeln $PAB=PCA$, blir efter tillägg av vinklarna BAD och CAD, vinkeln $PAD=PDA$ dvs. $PA=PD$ och orten en cirkel genom A med centrum

i P. P. s. s. visas, att $PA=PD_1$. Orten utgöres av den inom den givna cirkeln liggande bågen och den diametralt motsatta.

A. Pleijel och *Sb.*

2100) *Beräkna* $(a+c)(a+d)(a+e)(a+f):(b+c)(b+d)(b+e)(b+f)$, *då alla faktorer i täljare och nämnare äro* $\neq 0$ *samt* $\Sigma a=0$, $\Sigma a^3=0$ *utsträckta över* $a, b, \ldots, f$. *Examensuppgift i Cambridge*

I. Av $(a+b+c)^3\equiv a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)$ och analog relation för storheterna d, e, f erhålles genom addition

$0=\Sigma a^3+3(a+b)(a+c)(b+c)+3(d+e)(d+f)(e+f)$, ty $a+b+c=-(d+e+f)$. Då $\Sigma a^3=0$, erhålles

$(a+b)(a+c)(b+c)=-(d+e)(d+f)(e+f)$ (1). Tillämpas (1), blir $(a+c)(a+d)(c+d)=-(b+e)(b+f)(e+f)$ och $(a+e)(a+f)(e+f)=-(b+c)(b+d)(c+d)$. De sistnämnda ekvationerna ge vid multiplikation resultatet 1. *Sb.*

II. Antag, att $a, \ldots, f$ äro nollställena till polynomet $P(x)=x^6+\ldots$ Koefficienterna för x^5 och x^3 äro noll enligt förutsättningen och Newtons formler. Alltså $P(x)=\Pi(x-a)=x^6+Ax^4+Bx^2+Cx+D$. Täljaren i bråket är då $P(-a):2a(a+b)=-C:(a+b)$, ty $P(-a)=P(-a)-P(a)=-2aC$, och nämnaren har samma värde med $C\neq 0$, varför svaret blir 1, om $ab(a+b)\neq 0$. Av kontinuitetsskäl gäller resultatet allmänt. *H. R.* och *X.*

2101) *Det i tetraedern ABCD inskrivna klotet med centrum I tangerar sidoytorna ABC, ABD, ... i resp.* D_1, C_1 *... Visa, att ytorna ABC, ABD ... äro proportionella mot volymerna av pyramiderna* $IA_1B_1C_1$, $IA_1B_1D_1$ *...* *X.*

I. Då höjderna äro omvänt proportionella mot resp. basytor innebär påståendet att produkten av mätetalen för volymen $IA_1B_1C_1$ och höjden $(=h)$ från D är konstant. Om klotets radie är 1, I origo och koordinaterna för A_1, B_1, C_1 i ordning $(l_1; m_1; n_1)$, $(l_2; m_2; n_2)$, $(l_3; m_3; n_3)$, blir vol. $IA_1B_1C_1=\frac{1}{6}\Delta$, där $\Delta=|l_i\,m_i\,n_i|$ $(i=1, 2, 3)$. Ekvationen för tangentplanet genom A_1 är $l_1x+m_1y+n_1z-1=0$. Koordinaterna för D, som erhållas genom att kombinera ekvationerna för tangentplanen genom A_1, B_1, C_1, blir $(\Delta':\Delta;\ \Delta'':\Delta;\ \Delta''':\Delta)$, där $\Delta'''=|l_i m_i 1|$, $i=1, 2, 3$ osv. Insättas dessa i ekv. för planet $ABC=l_4x+m_4y+n_4z-1=0$, blir $h=|(l_4\Delta'+m_4\Delta''+n_4\Delta'''-\Delta):\Delta|$ och produkten $\frac{1}{6}\,|l_i\,m_i\,n_i\,1|$, $i=1, 2, 3, 4$, vilket bevisar satsen. *S. B.*

II. Om vi sätta $p_1=l_1x+m_1y+n_1z-1$, är p_1 avståndet från punkten $(x; y; z)$ till planet BCD med tecken taget. Motsvarande betydelse ha p_2, p_3, p_4. Multiplicerar man de fyra ekvationerna för p_1 ... med resp.

minorer i determinanten $D=|l_i, m_i, n_i; 1|$, $i=1, 2, 3, 4$, för sista kolonnens element, får man vid addition efter lämpligt val av tecken för volymerna $\Sigma p_i \times$volymen $IB_1C_1D_1=$volymen $A_1B_1C_1D_1$ (1). Å andra sidan är $\Sigma p_i \times$arean $BCD=3\times$volymen $ABCD$ (2). Detta gäller för alla punkter $(x; y; z)$. Men det kan icke finnas två olika (dvs. ej endast genom en faktor åtskilda) lineära samband mellan p_1, p_2, p_3, p_4 ty eljest skulle alltid två av dessa bestämma de återstående, vilket uppenbarligen icke är fallet. Alltså äro koefficienterna proportionella i (1) och (2), varav satsen. *X.*

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen

November 1957

Matematiska uppgifter[1]

Reallinjens matematiska gren

1. I en geometrisk serie med positiva termer är kvoten 2. Produkten av de två första termerna är 8 och produkten av samtliga termer 2^{55}. Bestäm antalet termer i serien.
2. Två klot skär varandra så, att $\frac{1}{3}$ av det mindre klotets yta ligger inom det större klotet och $\frac{1}{4}$ av det större klotets yta inom det mindre klotet. Hur många procent av det mindre klotets volym ligger inom det större klotet?
3. Bisektrisen till vinkeln A i en triangel ABC bildar 60° vinkel med sidan BC och är lika stor som radien i den kring triangeln omskrivna cirkeln. Beräkna vinkeln A.
4. Den inre begränsningsytan av en bägare är en rotationsyta. Den uppkommer, när den del av kurvan $y=\frac{1}{4}x^2$, som bestämmes av villkoret $0\leqq x\leqq R$, roterar kring y-axeln. Koordinatsystemet är rätvinkligt, och längdenheten är 1 cm på var och en av koordinataxlarna. Bägaren rymmer fylld till brädden $\frac{1}{4}$ liter. Bestäm konstanten R.
5. Vid en atombombexplosion bildas radioaktivt splitter, som utsänder radioaktiv strålning under lång tid efter explosionen. Denna strålnings intensitet brukar mätas i enheten »röntgen per timme», r/tim. Vid ett experiment fann man på ett visst avstånd från för-

[1] Enligt gymnasiereformen av år 1953, som tillämpas vid studentexamen fr. o. m. v. t. 1957.

söksstationen följande sammanhörande värden av tiden x tim efter explosionsögonblicket och intensiteten y r/tim:

x	0,01	0,05	0,1	0,5	1,0	5,0	10,0	50
y	251	36,3	15,8	2,29	1,00	0,145	0,063	0,009

Inpricka dessa värden i ett diagram med $^{10}\log x$ som abskissa och $^{10}\log y$ som ordinata, och upprita en kurva, som så nära som möjligt ansluter sig till de erhållna punkterna. Bestäm med hjälp härav $^{10}\log y$ som funktion av $^{10}\log x$. Ange slutligen i explicit form y som funktion av x.

6. Mot en normal till en parabel fälles normalen från parabelns brännpunkt. Sök och konstruera orten för den senare normalens fotpunkt.
7. Genom ekvationen $x=\cos^2 y$ och villkoret $0\leqq y\leqq\frac{1}{2}\pi$ bestämmes y i implicit form som en entydig funktion av x i området $0\leqq x\leqq 1$. Ange $\frac{dy}{dx}$ och $\frac{d^2y}{dx^2}$ i explicit form som funktioner av enbart x. Åskådliggör slutligen funktionen $y(x)$ med ett diagram. Ange särskilt ekvationerna för tangenterna i kurvans inflexionspunkt och ändpunkter.
8. Ekvationen $x^2+y^2-9+m(x-2)(x+2)=0$, där m är ett reellt tal, som kan anta olika värden, betyder ett kägelsnitt i ett rätvinkligt koordinatsystem. Undersök, hur kägelsnittets art och dess symmetriaxlars lägen beror av m. Därvid skall för en ellips anges läget av storaxeln och för en hyperbel läget av transversalaxeln. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man utifrån den givna formen för ekvationen visar, att kägelsnittet för alla m-värden går genom hörnen i en viss rektangel, samt schematiskt uppritar exempel på kägelsnitt av de olika typer, som erhållits vid utredningen.

Resultat: 1. 10. 2. 46,1 %. 3. $68{,}53^\circ$ [$\cos A=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$]. 4. $\sqrt[4]{2000/\pi}=5{,}023$. 5. $^{10}\log y=-1{,}20\cdot{}^{10}\log x$ och $y=x^{-1{,}20}$. 6. Parabeln $y^2=a(x-a)$, om den givna är $y^2=4ax$. 7. $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}(x-x^2)^{-0{,}5}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{4}(x-x^2)^{-1{,}5}(1-2x)$. Infl. i $(\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\pi)$, som även är kurvans centrum; i denna är tang. $4x+4y=2+\pi$ och i ändpunkterna $x=0$; $x=1$. 8. Rektangelns hörnpunkter är $(\pm 2;\ \pm\sqrt{5})$. Med beteckningarna $E(y)$, $H(y)$ för ellips, hyperbel med resp. storaxel och transversalaxel utefter y-axeln och centrum i origo erhålles: 1) $m<-\frac{9}{4}$, $H(x)$ 2) $m=-\frac{9}{4}$, linjeparet $y=\pm\frac{1}{2}x\sqrt{5}$ 3) $-\frac{9}{4}<m<-1$, $H(y)$ 4) $m=-1$, linjeparet $y=\pm\sqrt{5}$ 5) $-1<m<0$, $E(x)$ 6) $m=0$, cirkel 7) $m>0$, $E(y)$ 8) Då $m\to+\infty$ eller $-\infty$, närmar sig ellips, resp. hyperbel till linjeparet $x=\pm 2$.

Reallinjens biologiska gren

1. I triangeln ABC ligger hörnet A i punkten (1; 2) och hörnen B och C på den räta linjen $x+y+1=0$. Vinkeln B är 45° och triangelns yta 5 ytenheter. Bestäm koordinaterna för hörnen B och C i de båda fall, som kan förekomma.
2. Bestäm konstanterna a, b, c och d i funktionen $y=ax^3+bx^2+cx+d$, så att motsvarande kurva går genom origo och har maximipunkten $(-1; 1)$ och så att tangenten till kurvan i origo går genom nämnda maximipunkt. Upprita därefter kurvan.
3. I fyrhörningen $ABCD$ är sidorna AB och BC vardera 8 cm, CD 6 cm och DA 10 cm. Vinkeln A är 60°. Beräkna fyrhörningens övriga vinklar.
4. Se matem. gren 1.
5. I ett halvklot med radien 6 cm inskrives en rät cirkulär cylinder med ena basytan i halvklotets plana yta. I det sfäriska segment, som cylinderns andra basyta avskär av halvklotet, inskrives en rät cirkulär kon, vars basyta sammanfaller med segmentets plana yta och vars spets ligger på den sfäriska kalotten. Bestäm cylinderns höjd så, att den sammanlagda volymen av cylindern och konen blir så stor som möjligt.
6. Den inre begränsningsytan av en bägare är en rotationsyta. Den uppkommer, när den del av kurvan $y=\frac{1}{4}x^2$, som bestämmes av villkoret $0 \leqq x \leqq 5$, roterar kring y-axeln. Koordinatsystemet är rätvinkligt, och längdenheten är 1 cm på var och en av koordinataxlarna. Bestäm bägarens volym.
7. Se matem. gren 5.
8. I rektangeln $ABCD$ är sidorna AB 6 cm och BC 8 cm. I rektangeln inskrives en rätvinklig triangel EFG med den räta vinkelns spets F på sidan BC, kateten FG parallell med rektangelns diagonal BD samt hörnet E på sidan AB eller på sidan AD. Uttryck den rätvinkliga triangelns yta som funktion av sträckan BF, och åskådliggör denna funktion grafiskt. Ange speciellt det största värde, som ytan kan anta.

Resultat: 1. B_1 $(-3; 2)$ och C_1 $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ eller B_2 $(1; -2)$ och C_2 $(-1\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. 2. $a=b=1$, $c=-1$, $d=0$; min. i $(\frac{1}{3}; -\frac{5}{27})$. 3. $B=111{,}09°$, $C=80{,}41°$, $D=108{,}50°$. 5. $(\sqrt{13}-1)$ cm. 6. $625\pi/8=245{,}4$ cm³. 8. Om ytan$=y$ cm² och $BF=x$ cm, blir $y=\frac{25}{24}x(8-x)$ för $0<x\leqq 4{,}5$ och $y=\frac{75}{16}(8-x)$ för $4{,}5\leqq x<8$; $y_{\max}=16\frac{2}{3}$ för $x=4$.

Allmänna linjens sociala gren

1. Ett landområde, vars areal är 8424 m², avbildas på en lantmäterikarta som en fyrsiding $ABCD$. Sidorna i denna är i ordning

AB=75 mm, BC=60 mm, CD=42 mm och DA=39 mm. Diagonalen AC är 45 mm. I vilken längdskala är kartan ritad?

2 och 3. Se biol. gren 1 och 2.

4. En person erhöll vid årsskiftet 1947—48 av en annan person ett amorteringslån på 20 000 kr, löpande med $3\frac{1}{2}$ % ränta på ränta. Lånet skulle amorteras genom 20 lika stora annuiteter, verkställda vid årsskiftena, första gången 1948—49. Hur stor var skulden vid årsskiftet 1956—57, sedan den avtalade inbetalningen gjorts?

5. Se matem. gren 1 (biol. 4).

6 och 7. Se biol. gren 5 och 6; 8. Se matem. gren 5 (biol. 7).

Resultat: 1. 1:2000. 4. 12 670 kr.

Matematiska uppgifter för latin- och realgymnasiet

Enl. 1933 års stadga

Latingymnasiet[1]

1. Lös ekvationen $2(x+0{,}5)^2=\dfrac{x^2-0{,}2x-0{,}35}{x-0{,}5}-\dfrac{1-4x^2}{5}$

2. I en konvergent oändlig geometrisk serie är summan av de två första termerna $\frac{3}{4}$ av den tredje termen och produkten av de fyra första termerna $\frac{2}{3}$ av den sjätte termen. Hur stor är seriens summa?

3. Se social gren 1.

4. En korda AB i en cirkel utdrages till en punkt C, så att förlängningen BC blir $\frac{1}{3}$ av AB. Från C drages linjen CD vinkelrätt mot AC. Den tangerar cirkeln i punkten D. Hur stor vinkel bildar AB med diametern från A?

5. En halvcirkel, som är uppritad på basen i en triangel, skär den ena av de övriga sidorna mitt itu och den andra i förhållandet 7:2 från basen räknat. Bestäm triangelns vinklar.

6. I fyrsidingen $ABCD$ är sidorna AB och CD parallella. Diagonalen AC är 20 cm och delar vinkeln BAD mitt itu. Sidan BC är 15 cm och sidan CD 12,5 cm. Hur stor är fyrsidingens yta?

7. Bestäm den minsta vinkeln i en rätvinklig triangel, om radien i den i triangeln inskrivna cirkeln är $\frac{1}{12}$ av triangelns omkrets.

8. Kurvan $y=x^2-2x+3$ skäres i två punkter av den räta linjen $y=kx+5$, där k är en konstant. Ange summan av dessa båda punkters avstånd till x-axeln som funktion av k, och bestäm medelst grafisk metod eller på annat sätt värdet av k, när denna summa är så liten som möjligt. Ange även skärningspunkternas koordinater i detta fall.

[1] Uppg. för nyspråkligt lyceum utgjordes av latingymnasiets nr 2—8 och matem. linjens nr 1.

Resultat: 1. Rötterna är $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{6}$. — Upplös högra ledets täljare i faktorer. 2. $-0{,}6$. 4. $53{,}13°$. 5. $38{,}94°$, $70{,}53°$, $70{,}53°$. 6. 225 cm² eller 117 cm². — Trigonometri behöver ej användas. 7. $36{,}87°$. 8. Summan $=(k+1)^2+9$ med min. 9 för $k=-1$. Skärningspunkternas koord. är då $(-1; 6)$ och $(2; 3)$.

Realgymnasiet. Allmän kurs

5. Bestäm den minsta vinkeln i en rätvinklig triangel, om den ena kateten är lika med summan av den andra kateten och höjden mot hypotenusan.
8. Två plan, P och P', skär varandra utefter den räta linjen L under vinkeln u. Ett tredje plan P'' är normalplan till P och bildar vinkeln v med L. Skärningslinjen mellan P'' och P' bildar vinkeln w med P. Bevisa, att $\operatorname{tg} w = \sin v \operatorname{tg} u$.

Uppg. 1, 2, 4, 7 se biol. gren 3, 2, 5, 8; 3 och 6 se matem. gren 1 och 5.

Resultat: 5. $27{,}97°$.

Realgymnasiet. Specialkurs

1. En hyperbel har brännpunkterna i två motsatta hörn av en regelbunden sexhörning och går genom de övriga hörnen. Bestäm dess excentricitet.
2. Visa, att funktionen $y=\sqrt[3]{a-bx^3}$, där a och b är konstanter, satisfierar differentialekvationen
$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\cdot\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)$$
3. Undersök kurvan $y=\sin 2x+2\cos x$ med avseende på maximi-, minimi- och inflexionspunkter, samt upprita den i dess huvuddrag.
4. En cirkel går genom en parabels brännpunkt, har sin medelpunkt på axeln och tangerar parabeln i två skilda punkter. Bestäm förhållandet mellan cirkelns diameter och parabelns parameter.
5. En ellips har sina brännpunkter i punkterna $(c; 0)$ och $(-c; 0)$, där c är en konstant. Ellipsen skär positiva x-axeln i punkten A, positiva y-axeln i punkten B och negativa y-axeln i punkten B'. Sök och konstruera geometriska orten för skärningspunkten mellan tangenten i B och förlängningen av kordan $B'A$.
6. Undersök, hur antalet lösningar till ekvationen $\cos x = kx$ inom intervallet $0 < x \leqq \pi$ beror av värdet på konstanten k. Ändpunkterna för de olika k-intervallen skall bestämmas med tre säkra decimaler medelst grafisk metod eller genom systematisk prövning.
7. En likbent triangel har tyngdpunkten i origo, spetsen på positiva x-axeln och basens ena ändpunkt på den räta linjen $y=x+2$. Under-

sök och åskådliggör grafiskt, hur triangelns halva omkrets (p) varierar som funktion av abskissan (a) för triangelns spets. Undersök särskilt förhållandena i närheten av värdet $a=4$.

Resultat: 1. $1+\sqrt{3}=2{,}732$. 2. Derivera $y^3=a-bx^3$ implicit och eliminera b. 3. Kurvan har max. i $(\frac{1}{6}\pi+2n\pi;\ \frac{3}{2}\sqrt{3})$, min. i $(\frac{5}{6}\pi+2n\pi;\ -\frac{3}{2}\sqrt{3})$ samt inflexionspunkter i $(\frac{1}{2}\pi+2n\pi;\ 0)$, $(3{,}39+2n\pi;\ -\frac{3}{8}\sqrt{15})$, $(\frac{3}{2}\pi+2n\pi;\ 0)$ och $(6{,}03+2n\pi;\ \frac{3}{8}\sqrt{15})$. I dessa infl.p. är tangenternas riktningskoeff. -4, $2\frac{1}{4}$, 0 och $2\frac{1}{4}$ resp. 4. 2:1. — Fokus, medelp. och en tangeringspunkt bildar hörn i en liksidig triangel, vars sida=dubbla subnormalen=parametern. 5. Den i första axelvinkeln belägna delen av hyperbeln $\frac{1}{4}x^2-y^2=c^2$. 6. Om $a=0{,}318$ och $b=0{,}337$, gäller: 1) $k>-a$ *en* lösning 2) $-a\geq k>-b$ *två* lösningar 3) $k=-b$ *en* dubbel 4) $k<-b$ *ingen* lösning. 7. $a=0$ och $a=4$ motsvarar inga trianglar. För övriga a gäller $2p=\sqrt{10a^2-8a+16}\pm(a-4)$, där det övre tecknet gäller för $a>4$ och det undre för $a<4$. Då a växer från $-\infty$ till $\frac{4}{5}$, avtar p från $+\infty$ till min. 3,6; sedan växer p mot $+\infty$ med stigande a. Kurvan består av två hyperbelgrenar, som bildar ett hörn i (4; 6); derivatan har till vänster om punkten värdet 1, till höger värdet 2.

Uppgifter i fysik

1. En termosflaska innehöll en kvantitet vatten. I detta nedfördes en värmespiral, en termometer och en omrörare. Från ett ackumulatorbatteri sändes en ström genom spiralen och medelst ett skjutmotstånd reglerades strömstyrkan, så att denna hölls konstant vid 500 mA. Spänningen över spiralen var då 40,0 V. Man iakttog då, att temperaturen i termosflaskan steg 1,91° per minut. Sedan hällde man ytterligare 100 g vatten i flaskan och nedförde dessutom ett stycke aluminium av vikten 84,0 g. Upprepades nu försöket med oförändrad strömstyrka och spänning, steg temperaturen 1,07° per minut. Beräkna det värde på specifika värmet för aluminium som detta försök ger. Värmeutbytet med omgivningen försummas.
2. En kropp slungas ut från en punkt på markytan med utgångshastigheten 24 m/sek. Den träffar ett plant tak, som bildar vinkeln 45° med horisontalplanet, i en punkt som ligger 10 m högre än utgångspunkten. I vilken vinkel med horisontalplanet slungas kroppen ut, om den träffar taket under rät vinkel?
3. En homogen kub stöder med två parallella kantlinjer mot en glatt, vertikal vägg och ett strävt horisontellt golv. Det plan som innehåller nämnda kantlinjer bildar vinkeln α med golvplanet. Om α överstiger 45°, stjälper kuben; ligger α mellan 45° och en viss

mindre vinkel α_0, är kuben däremot i jämvikt. Beräkna α_0, om friktionskoefficienten mellan kuben och golvet är 0,25. Figur med samtliga på kuben verkande krafter utritade erfordras.

4. Man ville mäta brännvidden hos en tunn spridningslins. En avläsningskikare inställdes för den skull så, att man i densamma tydligt såg bilden av ett mycket avlägset föremål. Spridningslinsen placerades därefter nära intill kikarobjektivet. Bilden av det avlägsna föremålet blev då mycket suddig men framträdde åter skarpt, om en tunn samlingslins med brännvidden 25 cm sattes framför spridningslinsen på ett avstånd av 9 cm från denna. Beräkna härav den sökta brännvidden. Kikarens och de båda fristående linsernas huvudaxlar sammanfaller. Figur med enkel strålgång (dock ej i kikaren) erfordras.
5. Vinkelrätt mot den plana ytan av en halvsfär av glas infaller ett parallellt ljusknippe, som belyser hela den plana ytan. En del av detta strålknippe bryts i den buktiga ytan. Detta inträffar dock icke för strålar, som träffar den buktiga ytan längre bort från halvsfärens symmetrilinje än 6,0 cm. Bakom halvsfären sammanbryts de centrala strålarna till en punkt, som ligger 27,0 cm från den plana ytan. Beräkna ur dessa uppgifter ett värde på glasets brytningsindex. Figur angivande strålgången för de strålar, som erfordras för lösningen, kräves.
6. En vertikal, plan spegel är vridbar kring sin undre, horisontella sidokant, som befinner sig på 1,50 m avstånd från golvet. Mot spegeln infaller ett smalt knippe parallella ljusstrålar, som träffar spegeln vinkelrätt och på ett avstånd av 1,75 m från golvet. Spegeln vrides därefter kring sin undre kant. Hur mycket skall den vridas, för att det reflekterade strålknippet skall träffa golvet i en punkt, som ligger 1,00 m från vertikalplanet genom spegelns vridningsaxel. Figur återgivande strålgången efter spegelns vridning erfordras.
7. Till ett elements poler anslutes i serie ett motstånd på 0,70 ohm och ett annat på 10,0 ohm. Parallellt med det förra motståndet kopplas en amperemeter med resistansen 50 ohm. Strömstyrkan genom amperemetern blev då 1,80 mA. Beräkna härur ett värde på elementets polspänning. Kopplingsschema erfordras.
8. Ur försök med elektronstrålars avböjning har förhållandet mellan elektronens laddning och massa bestämts till $1{,}76 \cdot 10^{11}$ coulomb/kg. Man vet vidare, att det vid elektrolysförsök krävs 96 500 coulomb för att 1,01 g vätgas skall utvecklas. Vilket värde på förhållandet mellan väteatomens massa och elektronens massa kan erhållas ur dessa uppgifter?

Resultat: **1.** 0,22 cal/g · grad. **2.** 55°. **3.** 33,7°. **4.** −16 cm. **5.** 1,5. **6.** 32,1° eller 65,8°. **7.** 1,39 V. **8.** 1840.

Realexamen och praktisk realexamen h. t. 1957

I. Provräkning i realexamen

1. Vid början av år 1957 hade en person 1000 kr innestående på sparkasseräkning, som gav $3\frac{3}{4}$ % ränta. Från och med den 13 juli höjdes räntefoten till $4\frac{1}{2}$ %. Om ingen ytterligare ändring av räntefoten äger rum, vilken blir då räntan under året?
2. Förenkla så långt möjligt uttrycket $\frac{a^2}{0{,}8}+\frac{b^2}{0{,}25}-\left(2b-\frac{a}{3}\right)^2-\frac{ab}{0{,}75}$.
3. I triangeln ABC är vinkeln A rät. Från punkterna B och C avsättes på hypotenusan sträckorna BD och CE, vardera lika lång som närliggande katet. Punkterna D och E förenas med A. Hur stor är vinkeln EAD, om de spetsiga vinklarna i triangeln ABC förhåller sig som 2:3?
4. Hur många hela varv i sekunden vrider sig ett hjul på en bil, vars hastighet är 80 km/tim, om hjulets diameter är 28 engelska tum? 1 engelsk tum $=\frac{1}{36}$ yard, 1 yard $=0{,}91$ m. Som närmevärde på π användes $3\frac{1}{7}$.
5. Snälltåg 10 avgår från Laxå kl. 18.28 och ankommer till Hallsberg kl. 18.48. Det möter på vägen snälltåg 9, som avgår från Hallsberg kl. 18.37 och ankommer till Laxå kl. 18.57. Hur långt från Hallsberg möts tågen? Avståndet mellan Laxå och Hallsberg är 30 km.
6. En firma utsände under år 1956 genom postverket tre slags tryck-saker vägande 85 g, 150 g och 275 g. Av de olika slagen utsändes samtidigt 10 000 st, 4500 st respektive 2000 st. Postavgiften för enstaka försändelser av ifrågavarande slag var 15 öre, 20 öre respektive 25 öre. På grund av det stora antalet försändelser kunde taxan för gruppkorsband enligt bifogade tabell tillämpas, varigenom firman erhöll en avsevärd rabatt. Hur stor var denna i procent?

Antal försändelser	Vikt per försändelse		
	högst 100 g	högst 200 g	högst 300 g
500—4285	10,5 öre per st	14 öre per st	17,5 öre per st
4286—5000	450 kr	600 kr	750 kr
5001—16 666	9 öre per st	12 öre per st	15 öre per st

7. I en rät cirkulär kon är bottenytans diameter 10 cm. Höjden är 12 cm. I konen är inskrivet ett klot, som tangerar bottenytan och mantelytan. Beräkna detta klots yta. Som närmevärde på π användes 3,14.
8. En halvcirkel, som är uppritad på sidan AB i en triangel ABC, skär sidan BC mitt itu och sidan AC i förhållandet 7:2 från A

räknat. Hur långa är sidorna AC och BC, om längden av AB är 12 cm?

Resultat: **1.** 41 kr. **2.** $\frac{41}{36}a^2$. **3.** 45°. **4.** Ej fullt 10 varv/sek. **5.** 8,25 km. **6.** 36,2 %. **7.** $\frac{400}{9}\pi$ cm²=140 cm². **8.** AC och BC resp. 12 cm och 8 cm.

II. Provräkning i realexamen, avkortad kurs

1. Lös ekvationen $\frac{2{,}1x+0{,}4}{0{,}3}-1{,}3=19{,}4$

3. En handlande inköpte 350 kg äpplen och betalade 1,25 kr per kg. Frakten kostade 12,50 kr. Han kunde emellertid inte sälja all frukten, utan 18 % av partiet måste kasseras. Lagrings- och försäljningskostnaderna uppgick till 70 kr. Hur stor blev vinsten i procent av inköpssumman, om han sålde äpplena för 2 kr per kg?
4. En person hade 12 000 kr insatta i en bank, som gav 4 % ränta. Han placerade om dessa pengar på så sätt, att han för en del av dem köpte 35 st aktier å nominellt 300 kr stycket till en kurs av 255 kr och för resten $4\frac{1}{8}$ % obligationer till 102,5 % kurs. Hur stor blev ökningen av hans årliga ränteinkomst, då utdelningen på aktierna var 7 %?
5. Etylenglykol är en vätska, som blandad med vatten användes som kylvätska för flyg- och bilmotorer. En person hade i kylaren till sin bil 10 l av en blandning av etylenglykol och vatten i proportionen 1 : 4. Hur stor volym av denna blandning skall han tappa ur och ersätta med etylenglykol, för att kylarvätskan skall innehålla 40 volymprocent etylenglykol?
6. Två vägsträckor skall anläggas. Den ena är 5376 m lång, den andra 4032 m, och båda är lika svåra att bygga. Man har 56 man att utföra detta arbete. Hur många arbetsdagar kommer arbetet att ta, om man fördelar arbetsstyrkan så, att de båda vägsträckorna blir färdiga samtidigt? Arbetstiden är 8 timmar per dag, och varje man beräknas kunna bygga 3 m väg på 7 timmar.

Uppg. 2, 7, 8 se 1, 4, 6 i provräkning I.

Resultat: **1.** $x=2\frac{23}{30}$. **3.** 12 % av inköpssumman (450 kr). **4.** 385 kr. **5.** 2,5 l. **6.** 49 dagar.

III. Provräkning för huslig linje

Uppg. 1, 3—6 i provräkning I och 3—5 i provräkning II. — Av utrymmesskäl har uppg. för handelslinjen ej kunnat medtagas.

IV. Provräkning för maskinteknisk linje

1. Lös ekvationen $\dfrac{1{,}5x+1}{x-0{,}5}-\dfrac{x-0{,}5}{1{,}5x+1}=1{,}5$

5. I en rätvinklig triangel är radierna i den inskrivna och den omskrivna cirkeln 4 cm respektive 20,5 cm. Beräkna sidorna.

7. En behållare, tillverkad av jämntjock plåt med tätheten 7,6 kg/dm³, har en yttre volym av 1 m³ och en vikt av 50 kg. Behållaren har formen av en cylinder med utåtbuktande halvklot vid vardera änden. Halvkloten har samma diameter som cylindern. Behållarens hela längd är 5 gånger så stor som cylinderns yttre diameter. Beräkna plåtens tjocklek. Då plåtens tjocklek är liten i jämförelse med cylinderns diameter, kan plåtens volym anses utgöra produkten av ytan och tjockleken.

8. För att med jämn hastighet draga en kropp, vars tyngd är Q, uppför ett strävt lutande plan, vars lutningsvinkel mot horisontalplanet är $v°$ och vars friktionskoefficient är c, erfordras en med planet parallell kraft $P=Q\sin v+c\,Q\cos v$. Beräkna P för $Q=100$ kp och $c=0{,}15$ samt följande värden på v:

   0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 80°, 85°, 90°.

   Konstruera ett diagram, som visar hur P ändras med vinkeln v, och ange med ledning av diagrammet P:s största värde och motsvarande värde på v.

   Uppg. 2—4, 6 se 3—5, 7 i provräkning I.

Resultat: **1.** 4 och $-\frac{3}{8}$. **5.** 9 cm, 40 cm, 41 cm. **7.** 1,0 mm. 8. P-värdena (i kp) är i följd: 15; 40,4; 63,0; 81,3; 94,1; 100,5; 101,1; 100,9; 100,0. $P_{max}=101{,}1$ kp, för $v=81{,}5°$.

V. Uppgifter i fysik för maskinteknisk linje[1]

1. En tom glasflaska väger 200 g. Dess inre volym är 300 cm³. Om man i densamma häller 144 cm³ av en viss vätska, så flyter flaskan nätt och jämt i vatten. Beräkna härav vätskans täthet. Glasets täthet är 2,5 g/cm³.

2. En 16 m hög flaggstång, som nedtagits för målning, är placerad vågrätt på två bockar på respektive 7 m och 1 m från vardera änden. Beräkna belastningen på vardera bocken, om flaggstången väger 100 kg och dess tyngdpunkt ligger 6 m från den grövre änden.

3. Vid bestämning av specifika värmet för aluminium användes en kalorimeter, som innehöll 195 g vatten av temperaturen 17,6° C. I detta nedlades 115 g aluminium av temperaturen 40,0° C. Bland-

[1] Provet för kemisk-teknisk linje utgjordes av uppg. 1, 3, 4, 6—8 för maskinteknisk linje jämte en uppg. på tunna linser och en på elektrolys.

Fyrtionde årgångens innehåll
1957

Adell, B. Anm. av Fromherz, Physikalisch-chemisches Rechnen in Wissenschaft und Technik (62), Timm, General Chemistry (274).

Agrelius, R. Anm. av Evermark, Elektroteknik 64

Andersson, J. Om udda stambråk 165

— Anm. av Archibald, Outline of the History of Mathematics (198), Hofmann, Geschichte der Mathematik II (199).

Andersson, S. Kemilärarbristen och kemilärarnas arbetsbörda 109

— Föreningen i Lund för matem. naturv. underv., möte i nov. 1956 37

Asplund, E. Anm. av Friedman, Principles and Techniques of Applied Mathematics 53

Berg, Kerstin. Industriens Upplysningstjänsts studieresa 13—19 juni 1957 187

Bergqvist, B. Astronautik och rymdfart 89

Berndt, S. Anm. av Fung, An Introduction to the Theory of Aeroelasticity (201), Liepmann/Roshko, Elements of Gasdynamics (202).

Björck, G. Anm. av Hyltén-Cavallius/Sandgren, Matematisk analys (för nybörjarstadiet vid universitet och högskolor) 121

Block, E. Anm. av Crank, The Mathematics of Diffusion 267

Blom, G. Anm. av Meyer, Symposium on Monte Carlo Methods (195), Wallis/Roberts, Statistics: A New Approach (265), Snedecor, Statistical Methods (266), Mathematical Tables. Vol. 1 (279).

Bodén, E. Anm. av Hoyle, Frontiers of Astronomy 48

Borg, G. Anm. av Colloques sur les équations aux dérivées partielles 127

Borelius, G. Om halvledarnas elektriska egenskaper 153

— Ett beriktigande 296

Brimberg, S. On the scattering of slow neutrons by hydrogen molecules (autoref. av gradualavh.) 190

Bruno, B. Kurs i fysik i Uppsala 25 juni—5 juli 1957 185

Comét, S. Anm. av Thrall/Tornheim, Vector Spaces and Matrices 266

Dahlin, E. Anm. av Hoelscher/Springer, Engineering Drawing and Geometry (130), Rothbart, Cams: Design, Dynamics and Accuracy (215).

Dalenius, T. Sampling in Sweden. Contributions to the Methods and Theories of Sample Survey Practice (autoref. av gradualavh.) 118

Elvius, T. Anm. av Schalén, Sfärisk astronomi (46), Hall, Atomer och stjärnor (47); Jones/Rotblat/Whitrow, Atoms and the Universe (47).

Enfors, U. Anm. av Bellander, Televisionsmottagaren 130

Englund, B. Anm. av Drexler, Lehrbuch der Anorganischen Chemie (134); Langenheine, Qualitative Analyse in den chemischen Arbeitsgemeinschaften (152), Birkenstock/Schulte, Die Elektronentheorie im Unterricht der Oberstufe (278), Kemistyrket—Framtidsyrket (279).
Eriksson, F. Anm. av Favard, Cours de géométrie différentielle locale 268
Eriksson, Fr. Polymolecularity and Molecular Shape of Methyl Methacrylate Polymers etc. (autoref. av gradualavh.) 44
Eriksson, K. Ett problem inom termokemi 259
Faxén, H. Anm. av Townsend, The Structure of Turbulent Shear Flow 126
Forsner, Th. Anm. av Storm, Plastisk bearbetning 279
Forsling, W. Anm. av Lederer, Chromatographie sur papier des radioéléments 133
Fröberg, C.-E. Anm. av Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. Vol. VI. Numerical Analysis 53
Grundström, B. Anm. av da C. Andrade, An Approach to Modern Physics 210
Gustaver, B. Föreningen för matem. naturv. underv., årsmöte i jan. 1957 38
Gustavi, S. Anm. av Stratton/Morse m. fl., Spheroidal Wave Functions 54
Hanner, O. Ytinnehåll i euklidisk geometri 229
Hansson, E. Metodikkurs i fysik i Stockholm 25 juni—5 juli 1957..... 184
Hedström, F. Anm. av Ceaglske, Automatic Process Control for Chemical Engineers (56), Farley, Elements of Pulse Circuits (269), Grabbe, Automation in Business and Industry (272).
Hellsten, U. Anm. av Burkhill, The Theory of Ordinary Differential Equations 125
Hellström, H. Sätt att lossa glasproppar (116), Apparater för framställning av svavelväte och klor (162), Explosionsförsök (177).
Hemer, O. Anm. av Niven, Irrational Numbers 52
Hilding, S. Anm. av Coxeter, The Real Projective Plane 49
Hjalmars, S. Anm. av Pluvinage, Éléments de mécanique quantique (55), Faxén, Mekanik, Dynamik I (203).
Hjerting, F. Matematisk og fysisk pendul (34), Et forsøg over træghed (34), Forsøg med en faldende kugle (35).
Hjertstrand, Å. Anm. av Smith, Aircraft Gas Turbines 213
Hult, J. Anm. av Jaeger, Elasticity, Fracture and Flow 203
Ingelstam, E. Anm. av Physical Techniques in Biological Research (61), Guild, The Interference Systems of Crossed Diffraction Gratings (61), Tolansky, An Introduction to Interferometry (127).
Jonsson, C. V. Anm. av Schrödinger, Expanding Universes..... 201
Jönsson, T. Anm. av Jay, Calder Hall (64), Macmillan, Automation (66), Blüh/Elder, Principles and Applications of Physics (128), Reports on Progress in Physics Vol. XVIII (206), Year Book of the

Physical Society 1955 (206), Statens Naturvetenskapliga Forskningsråds Årsbok 1955 (207), Fermi, Atoms for the World (208), Crowther, Nuclear Energy in Industry (208), Arley/Skov, Atomenergiens udnyttelse (209), Merrill, Principles of Guided Missiles (214), Appleton, Science and the Nation (276), Compton, Atomic Quest: A Personal Narrative (277), Bates, Space Research and Exploration (277), Clarke, The Making of a Moon (277).

Lidén, K. Anm. av Strålningskemi, föredrag vid konferens i Stockholm 273

Liljeqvist, B. Demonstration av ljusets brytning i en lins (113), Cinemascopeprojektion (258).

Linde, J. O. Anm. av Campbell, High Temperature Technology (59), Elcock, Order-Disorder Phenomena (205), Kittel, Introduction to Solid State Physics (205), Temperley, Changes of State (269).

Lindquist, W. Demonstration av tobaksrökens beståndsdelar 256

Lundén, A. Isotope Enrichment by Countercurrent Electromigration in Molten Salts (autoref. av gradualavh.) 43

Lunell, E. Anm. av Hobson m. fl. Squaring the circle and other monographs (51), Holtoug/Skou-Jørgensen, Lærebog i teknisk matematik (192).

Lönnqvist, C. Ellipsens och hyperbelns ekvationer 254

Löwdin, P.-O. Den kovalenta kemiska bindningen i kvantmekanisk belysning 9

Magnéli, A. Anm. av Daniels m. fl. Experimental Physical Chemistry 133

Mathisson, S. Anm. av Schröder, Radiobyggboken, del 1 226

Meitner, Lise. Anm. av Gleditsch, Antoine Laurent Lavoisier 45

Nilsson, N. B. Anordning för uppritande av ellips och hyperbel på en tavla (111), Kaustikan (113), Luftlinser (260), Tavellinjaler (261).

Nylinder, S. Anm. av Fuller, Theory and Practice of Lubrication for Engineers 65

Peetre, J. Anm. av Brand, Vector Analysis (267), Montel, Leçons sur les récurrences et leurs applications (269).

Pershagen, B. Anm. av Charpie m. fl., Reactors 209

Pettersson, K. Stereochemical studies in the α-aryl carboxylic acid series etc. (autoref. av gradualavh.) 117

Pleijel, A. Ett fullständighetsproblem vid bestämning av geometriska orter 163

Proschwitz, von K. Några reflexioner kring ett studentproblem 261

— Anm. av Stenmark, Matematikundervisningen i realskolan och motsvarande skolformer 263

Riesel, H. Anm. av McCracken, Digital Computer Programming (196), Livesley, An Introduction to Automatic Digital Computors (268).

Rosengren, C. Tredje nordiska kongressen för lärare i matematik, fysik och kemi i Stockholm, aug. 1957 180

Rudberg, E. Om transistorverkan. Nobelpriset i fysik 1956 1
Rudberg, H. On the Theory of Relativistic Diffusion etc. (autoref. av gradualavh.) 188
Ryde, F. Anm. av Cartwright, Integral Functions (50), Blaschke, Kreis und Kugel (193).
Saarnio, Aa. Apparat för bestämmandet av vätskors specifika vikt 260
Sandgren, L. Anm. av Nyhlén/Amundsson/Broman, Funktionslära och analytisk geometri för gymnasiet (123), Brisac, Exposé élémentaire des principes de la géométrie euclidienne (194).
Schock, W. Uppgift 7 i matematik, specialkurs, jan. 1957 112
Schwarz, S. Anm. av Dollon, Problèmes d'agrégation 125
Sikjær, S. Relativitetsteori. En elementær fremstilling for gymnasiet ... 243
Slätis, H. Anm. av Bethe/Morrison, Elementary Nuclear Theory 58
Staffansson, E. Aktuell experimentalfysik 106
— Kurs i fysik för lärare vid högre tekniska läroverk 183
— Anm. av Martin, Geometrical Optics 127
Starck, G. En bestämning av smältpunkten för tenn 31
— Ekvivalentvikt för mangan och krom 173
— Demonstration av jod- och brommolekylernas termiska dissociation 239
— Svenska Kemistsamfundets Berzeliusdagar, 3—4 jan. 1957 39
— Anm. av Silicium/Schwefel/Phosphate: Colloquium 132
— Framställning av acetylen (36), Syrehalt i rent och förorenat vatten (36), Inversion av reducerande disackarider (114), Framställning av litopon (178), Analys av tomtebloss (179).
Starfelt, N. Experimental Study of Bremsstrahlung Spectra with the Use of Scintillation Spectrometers (autoref. av gradualavh.) 41
Stenström, V. Anm. av Bass, Cours de mathématiques 197
Storm, E. Anm. av Lundberg, Hållfasthetslära för tekniska läroverk (129), Dahlin/Elfman, Elementär hållfasthetslära (129).
Sunner, S. Anm. av Calvet/Prat, Microcalorimétrie. Applications physico-chimiques et biologiques 275
Svenonius, B. Anm. av Moore, Strövtåg på månen och Naur/Strömgren, Strövtåg i universum 211
Säverborn, S. Kurs i kemi i Stockholm 22 juli—3 aug. 1957 186
Tandberg, J. Anm. av Holland, Vaccuum Deposition of Thin Films (212), Robertson, Stress Corrosion, Cracking and Embrittlement (213).
Torgård, Ingrid. Studies on Particle Orbits in Plane Models of Stellar Systems (autoref. av gradualavh.) 42
Trane, Hj. En apparat för studium av ångbildning i luft 33
Ubisch, von H. Anm. av Jungk, Heller als tausend Sonnen. Die Geschichte der Atomforscher 152
Wahlborn, S. Anm. av Rose, Elementary Theory of Angular Momentum 270

Welander, P. Anm. av Patterson, Molecular Flow of Gases 202
Werthén, H. Anm. av McIlwain/Dean, Principles of Color Television 60
Wideqvist, S. Anm. av Lange, Kolorimetrische Analyse 63
Widmark, G. Investigations in the Field of Terpenes (autoref. av gradualavh.) 189
Wiedling, T. Directional correlation measurements and some other related investigations of excited nuclei (autoref. av gradualavh.) 119
Åslund, N. Anm. av Lass, Elements of Pure and Applied Mathematics 199
Åström, K.-J. Anm. av Surveys in Mechanics. The G. J. Taylor 70th Anniversary Volume 204
Öberg, T. Approximativa formler för vinklar 171
Ölander, A. En ny fyrställig logaritmtabell 25
— De kemiska reaktionernas mekanism. Nobelpriset i kemi 1956 77
Östling, S. Hydrering av omättade fetter 115
Matematiska uppgifter (red. av S. Bågman) 68, 135, 216, 280
Matem. och fysikaliska uppg. vid studentskrivningar och fyllnadsprövningar 1957: jan. (71), mars (138), aug. (219), nov. (283).
Provräkning i realexamen vt. och ht. 1957 ..... 145, 290
Praktisk realexamen vt. och ht. 1957: Uppg. för maskinteknisk linje i fysik (147, 292), i maskin- och byggnadslära (150, 294). Uppg. för kemisk-teknisk linje i kemi med laboratorieteknik (149, 293).
En rättelse 296

Under rubriken »Aktuellt»:

Svenska Kemistsamfundets Berzeliusdagar 3—4 jan. 1957 (39); Föreningen för matem. naturv. undervisning, årsmöte i Stockholm i jan. 1957 (38); Föreningen i Lund för matem. naturv. underv., möte i nov. 1956 (37); Tredje nordiska kongressen för lärare i matem., fysik och kemi, Stockholm—Uppsala 4—8 aug. 1957 (180); AB Atomenergi och Atomkommittén (40); Kemistdagar i organisk kemi (40); Kurser under sommaren 1957: Metodikkurs i fysik i Stockholm (184), kurs i fysik i Uppsala (185), kurs i kemi i Stockholm (186); kurs i fysik för lärare vid högre tekniska läroverk (183); Studieresa anordnad av Industriens Upplysningstjänst (187).

Gradualavhandlingar (autoreferat): S. Brimberg (190); T. Dalenius (118); Fr. Eriksson (44); A. Lundén (43); K. Pettersson (117); H. Rudberg (118); N. Starfelt (41); Ingrid Torgård (42); G. Widmark (189); T. Wiedling (119).

Lund 1957, Håkan Ohlssons boktryckeri.

ningstemperaturen blev 20,1° C. Man vet att det för uppvärmning av själva kalorimeterkärlet erfordras en värmemängd av 7 cal/grad (kalorimeterns vattenvärde). Vilket värde på aluminiums specifika värme erhålles ur dessa uppgifter?

4. En syrgasbomb, som innehöll 10 liter gas, användes för svetsning. Bombens vikt minskades därvid med 0,65 kg och trycket, som före svetsningen var 160 kp/cm², var efter densamma 112 kp/cm². Temperaturen var hela tiden 16° C. Beräkna av dessa uppgifter vikten av 1 liter syrgas av trycket 1 kp/cm² och temperaturen 16° C.
5. En kropp, vars vikt är 200 kg, glider utan begynnelsehastighet utför ett lutande plan, vars höjd är 10 m, och når planets bas med en hastighet av 7 m/s. Den lägesenergi kroppen äger, då den befinner sig i planets högsta punkt, övergår vid rörelsen utför planet dels i rörelseenergi, dels i värme, som alstras på grund av friktionen mellan kroppen och planet. Beräkna den värmemängd, som alstras vid rörelsen utför hela planet. Mekaniska värmeekvivalenten är 427 kpm/kcal. Tyngdkraftens acceleration är 9,8 m/s².
6. Ett motstånd på 3 ohm är tillverkat av en 0,8 mm tjock och 108 cm lång tråd av en viss metallegering. Man önskar göra ett motstånd på 25 ohm av samma sorts legering men av en tråd, som är hälften så tjock som den förstnämnda. Hur lång bör denna tråd vara?
7. Ett ackumulatorbatteri, som består av 50 st seriekopplade blyackumulatorceller, skall laddas genom anslutning till ett 220 V likströmsnät. Hur stort förkopplingsmotstånd erfordras, då laddningsströmstyrkan skall vara 3,0 A? Elektromotoriska kraften hos varje cell kan sättas till 2,3 V och dess inre resistans till 0,1 ohm.
8. En shuntmotors magnetlindning har resistansen 400 ohm och ankarlindningen 0,2 ohm. Beräkna den värmemängd, som tillsammans under 8 timmar utvecklas i dessa lindningar, då den anlagda spänningen är 440 V och den tillförda effekten är 8,8 kW. 1 kWh = =860 kcal.

Resultat: **1.** 1,25 g/cm³. **2.** 37,5 kp och 62,5 kp. **3.** 0,22 cal/g · grad. **4.** 1,35 g/l. **5.** 3,5 kcal. **6.** 225 cm. **7.** 30 ohm. **8.** 3820 kcal.

VI. Kemi med laboratorieteknik för kemisk-teknisk linje

1. Vad menas med oxidations- respektive reduktionsmedel? Är följande ämnen oxidations- eller reduktionsmedel: a) svavelväte, b) svaveldioxid, c) koppar, d) klor, e) väteperoxid?
2. Redogör för framställning av tackjärn ur järnmalm.
3. Redogör för vad som sker och vad som bildas — angiv även reaktionsformler — vid upphettning av följande ämnen: a) natriumvätekarbonat, b) jod, c) kaliumklorat, d) bariumsulfat.

4. En vattenlösning innehåller bly-, koppar-, zink-, ammonium- och nitrat-joner. Hur kan man kvalitativt påvisa dessa joner?
5. Angiv dels kemiska formler för följande syror: a) oxalsyra, b) myrsyra, c) mjölksyra, d) vinsyra, dels namn å respektive syrors natriumsalter.
6. Redogör med angivande av reaktionsformler för framställning av anilin ur bensen (bensol).
7. 50,0 ml av en vattenlösning av bariumhydroxid förbrukar vid titrering 11,50 ml 0,1 N saltsyra. Beräkna hur många gram $Ba(OH)_2$ 1 liter av ovannämnda lösning skulle innehålla.
8. Hur många ml 20 %-ig salpetersyra (täthet=1,12) erfordras för att överföra 10,0 g bly till blynitrat?
9. Hur många liter luft av 0° C och 760 mm Hg åtgår för fullständig förbränning av 10,0 g metanol (metylalkohol)? Luftens sammansättning=O_2+4N_2.
10. Försättes en lösning av natriumsulfit med en jodlösning, sker reaktionen $Na_2SO_3+J_2+H_2O=Na_2SO_4+2HJ$. 25,0 ml natriumsulfitlösning försättes med 50,0 ml 0,1 N jodlösning och surgöres med saltsyra. För titrering av överskott jod förbrukas 18,0 ml 0,12 N tiosulfatlösning. Beräkna antal gram Na_2SO_3 per liter lösning.

Atomvikter:	Ba=137,4	C =12,0	Cl =35,5	J =126,9
	N =14,0	Na=23,0	Pb=207,2	S=32,0

Resultat: **7.** 1,97 g. **8.** 36,2 ml, om endast kväveoxid bildas. **9.** 52,5 liter. **10.** 7,157 g.

VII. Beskrivande maskin- och byggnadslära för maskin-teknisk linje

1. En lyftkran, försedd med en lintrumma med 580 mm diameter, skall lyfta 5 ton. Vid lintrumman skall fästas ett kugghjul medelst 8 bultar, som anbringas på en cirkel med 420 mm diameter. Dessa bultar får belastas med en skjuvspänning av 450 kp/cm². Beräkna deras diameter och föreslå Whitworth-skruv.
2. En kätting är gjord av 13 mm rundstål, som får belastas med en dragspänning av 490 kp/cm². Hur stor last kan a) *en* sådan kätting (en part) bära? b) två parter som är parallella? c) två parter som bildar 90° vinkel mot varandra? d) två parter i 120° vinkel?
3. En stållina till en kran har en ytterdiameter av 14 mm. Den består av 8 trådar med 1,07 mm diameter, 72 trådar med 0,50 mm diameter och 72 trådar med 0,89 mm diameter. Den tillåtna dragspänningen i linan får uppgå till högst 18,7 kp/mm². Den verksamma arean A mm² får beräknas ur dessa uppgifter, men får icke sättas större än $A=0{,}37\,d^2$, då d=linans diameter i mm. Med hur många kp får linan belastas?

4. En bensinmotors totala verkningsgrad bestämdes genom att motorn fick driva en bromsskiva, under det att bromskraften (=periferikraften på bromsskivan) och bensinåtgången observerades. Bromsskivans diameter var 340 mm, periferikraften 101,7 kp och varvtalet 1130 r/min. Under 20 minuter uppmättes bensinförbrukningen till 3,55 liter, varjämte bensinens täthet bestämdes till 0,72 kg/dm³ och dess värmevärde till 10 510 kcal/kg. Beräkna motorns totala verkningsgrad.
5. Från en vattenkraftstation överföres elektrisk energi till ett industriföretag. Den energi, som alstras i vattenkraftstationen, transformeras upp till högspänning i en transformator, som arbetar med 96,7 % verkningsgrad. Förlusterna i högspänningslinjen från denna transformator till nedtransformatorn uppgår till 9,8 %. Nedtransformatorn har samma verkningsgrad som upptransformatorn. I lågspänningsledningen till motorn är förlusterna 11,6 %. Motorn, som avger 5 hk har 87,4 % verkningsgrad. Hur många kW måste sändas ut från vattenkraftstationen för att driva denna motor?
6. För sådana järnbalkar i en byggnad, som är utsatta för böjning, finns två bestämmelser rörande den tillåtna belastningen, nämligen 1) böjspänningen får ej vara större än 1200 kp/cm², 2) nedböjningen får ej vara större än 1/400 av spännvidden. En dylik järnbalk är i en byggnad fritt upplagd i båda ändar med 6,5 m avstånd (spännvidd) mellan ändarna och belastad med en jämnt fördelad last av 7800 kp. Beräkna den I-balk, som uppfyller båda fordringarna. $E = 2\,150\,000$ kp/cm².
7. En elmotor på 2,6 hk vid 960 r/min kan förses med en kilremsskiva med 110 mm diameter, försedd med spår för kilremmar av typ A, var och en med en area av 0,85 cm². Den periferikraft, som kan överföras per cm² av remmens tvärsnitt, beror på periferihastigheten enligt nedanstående tabell. Rita upp ett diagram, som visar hur denna »specifika» periferikraft varierar med periferihastigheten (drag en jämn kroklinje, icke räta linjer från punkt till punkt) och använd detta diagram som hjälp vid beräkningen av hur många kilremmar av typ A, som bör användas.

Periferihastighet	m/s	2	4	6	8	10
»Specifik» periferikraft	kp/cm²	13,3	12,3	10,7	8,5	5,6

8. Det gäller att beräkna värmeförlusten genom ett bostadsrums yttervägg. Väggen är 3,7 m lång och 2,8 m hög. I den finns ett fönster, som är 0,95 m brett och 1,40 m högt. Om temperaturskillnaden mellan rumsluften och ytterluften är 1°, går genom varje m² av fönsterytan 3,5 kcal per timme ut från rummet. Genom den övriga delen av väggen går under samma förhållanden 0,92 kcal per timme.

Dessa förluster är proportionella mot temperaturskillnaden. Vid sträng kyla får man i den trakt, där rummet är beläget (ungefär så nordligt som Karlstad och Stockholm) räkna med att yttertemperaturen kan sjunka till −20°, under det att man vill hålla rumstemperaturen uppe i +18°. Hur många kcal går under sådana förhållanden per timme ut genom ytterväggen?

Resultat: 1. 15,6 mm; W = $\frac{5}{8}$″. 2. a) 1300 kp b) 2600 kp c) 1840 kp d) 1300 kp. 3. 1230 kp. 4. 0,21. 5. 5,6 kW. 6. YMP 30. 7. 4 st. 8. 492 kcal/tim.

Forts. från s. 279.

och litat till ett gott figurmaterial. Dock kunde det viktiga inledningskapitlet gjorts betydligt fylligare och fått mer utrymme än knappa fem sidor.

Tyvärr har författaren avstått från att låta några genomräknade och diskuterade tillverkningsexempel belysa framställningen. Sådana skulle säkert ha hälsats välkomna särskilt av de lärare, som icke kan hämta exempel ur egen färsk verkstadserfarenhet. En annan anmärkning, som man gärna vill rikta mot såväl denna som andra läroböcker på området, är att kostnadssynpunkter alltför litet tagits med i diskussionen. Några exempel på kostnadsberäkningar skulle varit värdefulla.

Författaren är en erfaren och erkänd lärare, och man noterar med tillfredsställelse hans korrekta språkbehandling. »Varje lärare är en lärare i svenska».

»Plastisk bearbetning» är den första i en serie läroböcker i verkstadsteknik som håller på att utarbetas (redaktion: Elis Dahlin, Gunnar Meuller, Gert Nyberg, Erik Storm). En komplettering av serien med en lärobok i arbetsstudier och planering skulle säkerligen hälsas med stor glädje. *Th. Forsner*

Ett beriktigande. I min uppsats i sept. h. 1957, s. 160, ekv. (15) Skall 1240 utbytas mot 8068 och tre rader längre ned 1300 mot 13 000.
G. Borelius

En rättelse. I sept. h. 1957, s. 226 skall i 10:e raden uppifrån gränsvillkoret lyda $110\ \mathrm{V} < E_2 < 140\ \mathrm{V}$. *Red.*

MATEMATIK

för realgymnasiets matematiska gren

NYHLÉN • AMUNDSSON • BROMAN

Planimetri och trigonometri Inb. 4:85

Funktionslära och analytisk geometri Inb. 12:—

Rymdgeometri 4:75

Godkända av Statens läroboksnämnd

»Författarna har på ett mycket tillfredsställande sätt lyckats med avvägningen mellan korrekt aritmetisk bevisföring och på detta stadium nödvändigt utnyttjande av åskådningen...

Behandlingen av den analytiska geometrin präglas liksom framställningen av funktionsläran av klarhet och överskådlighet...

... föreliggande lärobok är en sakligt synnerligen gedigen skolbok.»

Lennart Sandgren i Elementa om Funktionslära och analytisk geometri.

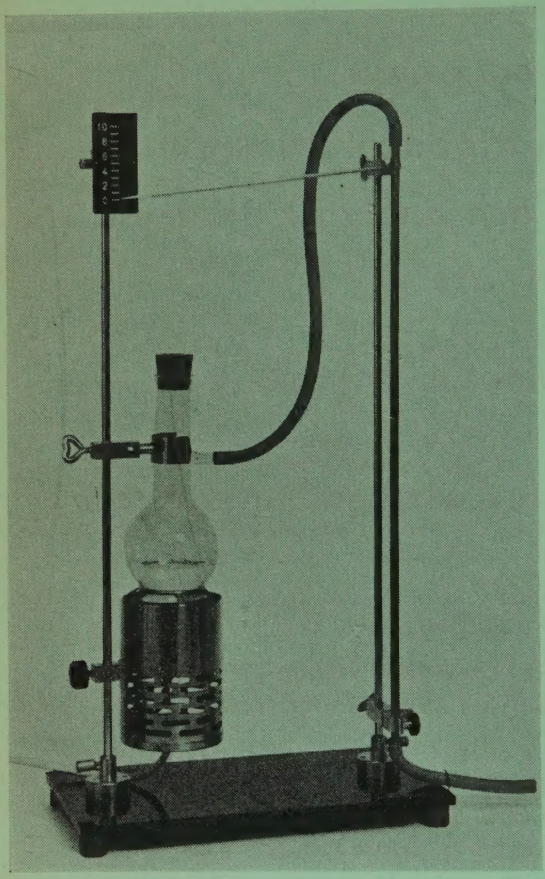
OBS! Under arbete är en förkortad upplaga av läroböckerna, avsedd för realgymnasiets biologiska gren och allmänna linjens sociala gren. Början göres med Funktionslära och analytisk geometri, som beräknas föreligga till hösten 1958.

S B F
SVENSKA BOKFÖRLAGET

SKOLBOKCENTRALEN
David Bagaresgata 20, Stockholm C • Postgiro 55 160
UTSTÄLLNING • LÄRAREXEMPLAR • REKVISITIONER
Utställning även Göteborg, Parkgatan 19
Malmö, Hamngatan 4 · *Linköping*, Klostergatan 26
Luleå, Tullgatan 16 · *Sundsvall*, Rådhusgatan 37

Norstedts experimentsatser

VÄRMELÅDAN



Hur man bestämmer förlängningen av ett metallrör vid uppvärmning

Ja, här har vi den nu — den efterlängtade värmelådan, nr 6 i Norstedts serie experimentsatser för fysikundervisningen.

Försöken är instruktiva och enkla att utföra genom den uppbyggnadsmetod som används. Värmelådans detaljer kan dessutom användas både vid demonstrationer och laborationer.

Folkskolans, enhetsskolans och realskolans undervisning i värmelära klarar Ni lekande lätt med Norstedts värmelåda.

NORSTEDTS SKOLAVDELNING

STOCKHOLM · GÖTEBORG · MALMÖ · LINKÖPING · LULEÅ · SUNDSVALL

LUND 1957, HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI